ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2011-12
Διδάσκων: Χ.Κουρουνιώτης

Μ2822 ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

http://www.math.uoc.gr/~chrisk/ErgAn/

Φυλλάδιο 5

Μηδενικές Ακολουθίες (συνέχεια)

Λήμμα Εάν $(a_n) \to \infty$ τότε $\left(\frac{1}{a_n}\right) \to 0$.

Προσοχή Θα μελετήσουμε προσεκτικά την απόδειξη αυτού του Λήμματος, γιατί αποτελεί υπόδειγμα πολλών παρομοίων αποδείξεων.
Θέλουμε να δείξουμε οτι $\left(\frac{1}{a_n}\right) \to 0$, δηλαδή να δείξουμε οτι, για δοθέν $\varepsilon > 0$, υπάρχει N τέτοιο ώστε $\left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$ όταν $n > N$. Υποθέτουμε οτι $(a_n) \to \infty$, δηλαδή οτι για οποιοδήποτε C υπάρχει M τέτοιο ώστε $a_n > C$ όταν $n > M$.

Για να χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση, αναζητούμε κάποια σχέση μεταξύ του ε και του C, που να μας επιτρέπει, από την υπόθεση $a_n > C$, να συμπεράνουμε οτι $\left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η σχέση είναι σχεδόν προφανής: εάν $C = \frac{1}{\varepsilon}$, τότε η υπόθεση $a_n > C = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ συνεπάγεται οτι $0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon$.
Μετά από αυτή την προεργασία μπορούμε να καταγράψουμε την απόδειξη ως εξής:
Για δοθέν $\varepsilon > 0$, θέτουμε $C = \frac{1}{\varepsilon}$. Από την υπόθεση, υπάρχει κάποιο M τέτοιο ώστε $a_n > C = \frac{1}{\varepsilon}$ όταν $n > M$. Αλλά $\frac{1}{\varepsilon} > 0$, και συνεπώς $\left|\frac{1}{a_n}\right| = \frac{1}{a_n} < \varepsilon$ όταν $n > M$. Αρα υπάρχει N που ικανοποιεί τις απαιτήσεις του ορισμού, συγκεκριμένα $N = M$.

Συχνά στην Ανάλυση, θέλουμε να αποδείξουμε προτάσεις της μορφής $A \Rightarrow B$, όπου A και B είναι προτάσεις της μορφής

$$A : \text{Για κάθε } \delta \text{ υπάρχει } M \text{ τέτοιο ώστε να ισχύει } K(\delta, M)$$

$$B : \text{Για κάθε } \varepsilon \text{ υπάρχει } N \text{ τέτοιο ώστε να ισχύει } L(\varepsilon, N)$$

Θα διακρίνουμε το στάδιο της αναζήτησης από την τελική καταγραφή της απόδειξης.

Θέλουμε να αποδείξουμε την B, υποθέτοντας οτι ισχύει η A. Για οποιοδήποτε δοθέν ε θέλουμε να δείξουμε οτι υπάρχει N τέτοιο ώστε να ικανοποιείται η $L(\varepsilon, N)$. Εφόσον υποθέτουμε οτι για κάθε δ υπάρχει M τέτοιο ώστε να ικανοποιείται η $K(\delta, M)$, ξεκινάμε αναζητώντας τις σχέσεις που πρέπει να υπάρχουν μεταξύ των δ και ε και μεταξύ των N και M, ώστε η ιδιότητα $K(\delta, M)$ να συνεπάγεται την $L(\varepsilon, N)$.

Ας υποθέσουμε οτι βρήκαμε κάποια δ_ε και N_M, τέτοια ώστε $K(\delta_\varepsilon, M) \Rightarrow L(\varepsilon, N_M)$. Η λογική σειρά *καταγραφής* της απόδειξης είναι η ακόλουθη:

Για δοθέν ε θεωρούμε το δ_ε.
Από την υπόθεση οτι ισχύει η A, έχουμε οτι υπάρχει M τέτοιο ώστε να ισχύει η $K(\delta_\varepsilon, M)$.
Τότε όμως ισχύει η $L(\varepsilon, N_M)$, δηλαδή δείξαμε οτι υπάρχει $N = N_M$ τέτοιο ώστε να ισχύει η $L(\varepsilon, N)$.

Πριν προχωρήσετε, βεβαιωθείτε οτι έχετε ολοκληρώσει τα προβλήματα του Φυλλαδίου 4.

Πρόβλημα 5.1 Βρείτε ένα παράδειγμα για να δείξετε οτι η αντίστροφη πρόταση

$$\text{Εάν } (a_n) \to 0 \ \text{ τότε } \left(\frac{1}{a_n}\right) \to \infty$$

είναι λανθασμένη, ακόμα και αν $a_n \neq 0$ για κάθε n.

Λήμμα Η ακολουθία $(a_n) \to 0$ εάν και μόνον εάν $(|a_n|) \to 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Από τον ορισμό, η ακολουθία $(|a_n|)$ τείνει στο μηδέν εάν και μόνον εάν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε $|\,|a_n|\,| < \varepsilon$ όταν $n > N$. Αλλά η απόλυτη τιμή του $|a_n|$ είναι $|a_n|$, δηλαδή $|\,|a_n|\,| = |a_n|$, και συνεπώς η $(|a_n|)$ είναι μηδενική εάν και μόνον εάν η (a_n) είναι μηδενική.

Παράδειγμα Δείξαμε προηγουμένως οτι $\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$. Αλλά $\frac{1}{n} = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$, και συνεπώς $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \to 0$.

Πρόβλημα 5.2 Εάν η ακολουθία (a_n) είναι μηδενική και c είναι ένας σταθερός αριθμός, αποδείξτε ότι η ακολουθία $(c \cdot a_n)$ είναι μηδενική. Εξετάστε χωριστά τις περιπτώσεις $c \neq 0$ και $c = 0$.
Συμπεράνατε ότι η ακολουθία $(10/\sqrt{n})$ είναι μηδενική.

Θεώρημα
Κανόνες Αθροίσματος και Γινομένου

Υποθέτουμε οτι $(a_n) \to 0$ και $(b_n) \to 0$. Τότε, για οποιουσδήποτε αριθμούς c και d:

$$\begin{array}{ll} (ca_n + db_n) \to 0 & \textbf{Κανόνας Αθροίσματος} \\ (a_n b_n) \to 0 & \textbf{Κανόνας Γινομένου} \end{array}$$

Παράδειγμα

$\left(\frac{1}{n^2}\right) = \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) \to 0$ (Κανόνας Γινομένου)

$\left(\frac{2n-5}{n^2}\right) = \left(\frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}\right) \to 0$ (Κανόνας Αθροίσματος)

Στα επόμενα προβλήματα κατασκευάζουμε, σταδιακά, την απόδειξη του Θεωρήματος.

Πρόβλημα 5.3 Υποθέστε ότι (a_n) και (b_n) είναι και οι δύο μηδενικές, και δίδεται $\varepsilon > 0$.

1. Πρέπει να υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε $|a_n| < \varepsilon$ όταν $n > n_1$;
2. Πρέπει να υπάρχει n_2 τέτοιο ώστε $|b_n| < 1$ όταν $n > n_2$;
3. Υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε όταν $n > n_0$ τότε $n > n_1$ και $n > n_2$;
4. Εάν $n > n_0$, ισχύει ότι $|a_n b_n| < \varepsilon$;

Έχετε αποδείξει ότι το κατά όρους γινόμενο δύο μηδενικών ακολουθιών είναι μηδενική ακολουθία.

5. Εάν η ακολουθία (c_n) είναι επίσης μηδενική, τότε τί συμβαίνει στην $(a_n b_n c_n)$; Τί συμβαίνει στο κατά όρους γινόμενο k μηδενικών ακολουθιών;

Πρόβλημα 5.4 Υποθέστε ότι (a_n) και (b_n) είναι μηδενικές ακολουθίες, και δίδεται $\varepsilon > 0$.

1. Πρέπει να υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε $|a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$ όταν $n > n_1$;
2. Πρέπει να υπάρχει n_2 τέτοιο ώστε $|b_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$ όταν $n > n_2$;
3. Υπάρχει ένας αριθμός n_0 τέτοιος ώστε, όταν $n > n_0$, να ισχύουν και τα δύο: $n > n_1$ και $n > n_2$;

Έχετε αποδείξει ότι το κατά όρους άθροισμα δύο μηδενικών ακολουθιών είναι μηδενικό.

4. Εάν η ακολουθία (c_n) είναι επίσης μηδενική, τότε τί συμβαίνει στην $(a_n + b_n + c_n)$; Τι συμβαίνει με το άθροισμα k μηδενικών ακολουθιών;

Πρόβλημα 5.5 Συνδυάστε τα συμπεράσματα των προηγουμένων Προβλημάτων, και γράψτε στον παρακάτω χώρο την απόδειξη του Κανόνα Αθροίσματος: Εάν (a_n) και (b_n) είναι και οι δύο μηδενικές ακολουθίες, δείξτε ότι η ακολουθία $(c \cdot a_n + d \cdot b_n)$ είναι μηδενική, όπου c και d είναι σταθεροί αριθμοί.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Απάντηση στο Πρόβλημα του Φυλλαδίου 3 Θεωρούμε μια οποιαδήποτε ακολουθία. Θα ονομάσουμε έναν όρο a_δ *όρο δαπέδου* εάν κανένας από τους επόμενους όρους δεν είναι μικρότερος: δηλαδή εάν $a_\delta \leq a_n$ για κάθε $n \geq \delta$. Εξετάζουμε τρεις περιπτώσεις:

1. Εάν η ακολουθία (a_n) έχει άπειρους όρους δαπέδου, υπάρχει υπακολουθία (a_{n_i}) που αποτελείται από όρους δαπέδου.

   Ισχύει $n_{i+1} > n_i$, και από τον ορισμό του όρου δαπέδου, αυτό συνεπάγεται $a_{n_{i+1}} \geq a_{n_i}$. Αρα η υπακολουθία είναι αύξουσα.

2. Εάν η ακολουθία έχει πεπερασμένο πλήθος όρων δαπέδου, υποθέτουμε οτι a_Δ είναι ο τελευταίος όρος δαπέδου. Θα κατασκευάσουμε γνησίως φθίνουσα υπακολουθία (a_{n_i}).

   Θέτουμε $n_1 = \Delta + 1$.

   Θεωρούμε οτι έχουμε ορίσει τον όρο n_i, $i \geq 1$. Εφόσον $n_i \geq n_1 > \Delta$, a_{n_i} δεν είναι όρος δαπέδου. Αρα υπάρχει $m > n_i$, τέτοιο ώστε $a_m < a_{n_i}$. Θέτουμε $n_{i+1} = m$. Η υπακολουθία (a_{n_i}) που ορίζεται αναδρομικά είναι γνησίως φθίνουσα.

3. Υποθέτουμε οτι η ακολουθία (a_n) δεν έχει κανέναν όρο δαπέδου. Θέτουμε $n_1 = 1$.

   Θεωρούμε οτι έχουμε ορίσει τον όρο n_i, $i \geq 1$. Εφόσον a_{n_i} δεν είναι όρος δαπέδου, υπάρχει $m > n_i$, τέτοιο ώστε $a_m < a_{n_i}$. Θέτουμε $n_{i+1} = m$. Η υπακολουθία (a_{n_i}) που ορίζεται αναδρομικά είναι γνησίως φθίνουσα.