

M2822 ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Φυλλάδιο 7

Πράξεις με όρια

Θεώρημα Υποθέτουμε ότι $(a_n) \rightarrow a$ και $(b_n) \rightarrow b$. Τότε

| | |
|---|---|
| $(ca_n + db_n) \rightarrow ca + db$ | Κανόνας Αθροίσματος για ακολουθίες |
| $(a_nb_n) \rightarrow ab$ | Κανόνας Γινομένου για ακολουθίες |
| εάν $b \neq 0$, $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \rightarrow \frac{a}{b}$ | Κανόνας Πηλίκου για ακολουθίες |

Ενας άλλος τρόπος να διατυπώσουμε αυτούς τους κανόνες είναι συχνά πιο πρακτικός

Εάν οι ακολουθίες (a_n) και (b_n) συγκλίνουν, τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n + db_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + d \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_nb_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

και εάν $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) \neq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)}$$

Προσέξτε ότι απαραίτητη προϋπόθεση για να ισχύουν οι παραπάνω ισότητες, είναι να υπάρχουν τα όρια $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Εάν αυτά δεν υπάρχουν, τα όρια στα αριστερά των παραπάνω ισοτήτων μπορεί να υπάρχουν, αλλά προφανώς τότε δεν ισχύει η ισότητα.

Παράδειγμα Εάν $a_n = (-1)^n$ και $b_n = (-1)^{n+1}$, τότε τα όρια $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ δεν υπάρχουν, αλλά $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 0$.

Αυτές οι ισότητες μας επιτρέπουν να υπολογίζουμε τα όρια πολλών ακολουθιών.

Παράδειγμα Κάθε σύμβολο $=$ σημαίνει 'εφ' όσον υπάρχουν τα όρια στα δεξιά του $=$, τότε υπάρχουν και τα όρια στα αριστερά, και οι δύο εκφράσεις είναι ίσες'. Με εξαντλητική λεπτομέρεια, θα γράφαμε

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 1)(6n - 1)}{2n^3 + 5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(6 - \frac{1}{n}\right)}{2 + \frac{5}{n^3}} \\
&= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(6 - \frac{1}{n}\right)\right]}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{5}{n^3}\right)} && \text{από τον Κανόνα Πηλίκου} \\
&= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(6 - \frac{1}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{5}{n^3}\right)} && \text{από τον Κανόνα Γινομένου} \\
&= \frac{\left(1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \left(6 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)\right)}{2 + 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3}\right)} && \text{από τον Κανόνα Αθροίσματος} \\
&= \frac{(1 + 0)(6 + 0)}{2 + 0} \\
&= 3
\end{aligned}$$

Αν δεν σας ζητείται να αναφέρετε που χρησιμοποιείτε κάθε κανόνα, θα γράφατε

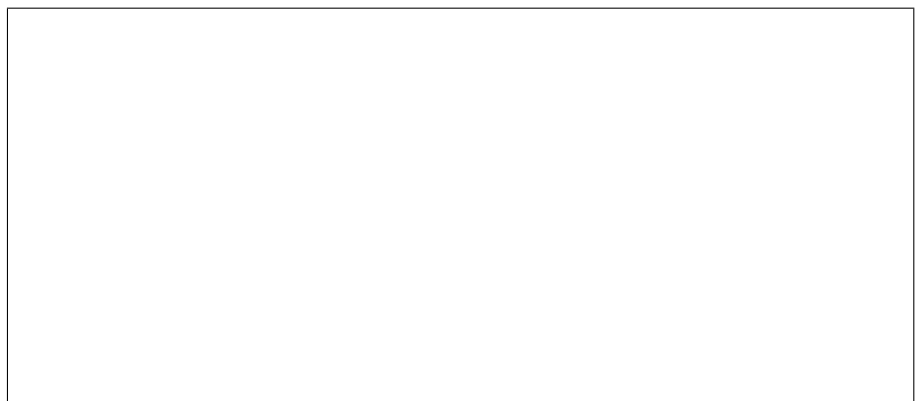
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 1)(6n - 1)}{2n^3 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(6 - \frac{1}{n}\right)}{2 + \frac{5}{n^3}} = \frac{(1 + 0)(6 + 0)}{2 + 0} = 3$$

ή

$$\frac{(n^2 + 1)(6n - 1)}{2n^3 + 5} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(6 - \frac{1}{n}\right)}{2 + \frac{5}{n^3}} \rightarrow \frac{(1 + 0)(6 + 0)}{2 + 0} = 3$$

Πρόβλημα 7.1 Χρησιμοποιήστε τον κανόνα αθροίσματος για τις μηδενικές ακολουθίες για να αποδείξετε τον κανόνα αθροίσματος για ακολουθίες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Πρόβλημα 7.2 Δείξτε ότι

$$(a_n - a)(b_n - b) + a(b_n - b) + b(a_n - a) = a_n b_n - ab$$

και χρησιμοποιήστε αυτήν την ταυτότητα και τους κανόνες για μηδενικές ακολουθίες, για να αποδείξετε τον κανόνα γινομένου για ακολουθίες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Κανόνας Πηλίκου Εάν $(a_n) \rightarrow a$ και $(b_n) \rightarrow b \neq 0$, τότε $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \rightarrow \frac{a}{b}$.

Πρόβλημα 7.3 Γράψτε την απόδειξη του κανόνα πηλίκου στον παρακάτω χώρο. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα ακόλουθα βήματα:

1. Παρατηρήστε ότι $(bb_n) \rightarrow b^2$, και δείξτε ότι $bb_n > \frac{b^2}{2}$ για αρκετά μεγάλο n .
2. Δείξτε ότι, τελικά, $0 \leq \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \leq \frac{2}{b^2} \cdot |b - b_n|$, και συνεπώς $\left(\frac{1}{b_n}\right) \rightarrow \frac{1}{b}$.
3. Συμπεράνετε ότι $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \rightarrow \frac{a}{b}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πρόβλημα 7.4 Βρείτε το όριο των παρακάτω ακολουθιών.

$$\begin{aligned} (\alpha') \quad & \frac{3n^2+2}{4n^2-3n} & (\beta') \quad & \frac{2^n-1}{2^{n+1}} \\ (\gamma') \quad & \frac{(\sqrt{n}+3)(\sqrt{n}-1)}{3\sqrt{n}-5n} & (\delta') \quad & \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} \end{aligned}$$

Αλλα χρήσιμα αποτελέσματα

Θεώρημα Υποθέτουμε ότι $(a_n) \rightarrow \ell$ και $(b_n) \rightarrow \ell$. Εάν, τελικά, $a_n \leq c_n \leq b_n$ τότε $(c_n) \rightarrow \ell$.
Θεώρημα Παρεμβολής για ακολουθίες

Πρόβλημα 7.5 Αποδείξτε το Θεώρημα Παρεμβολής για ακολουθίες.

Λήμμα Εάν $(a_n) \rightarrow a$ τότε $(|a_n|) \rightarrow |a|$.
Κανόνας Απολύτου Τιμής

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Γνωρίζουμε ότι $(a_n - a)$ είναι μηδενική, και συνεπώς $(|a_n - a|)$ είναι μηδενική. Από την αντίστροφη τριγωνική ανισότητα, $0 \leq ||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$. Αρα, από το Θεώρημα Παρεμβολής, $(||a_n| - |a||) \rightarrow 0$, και συνεπώς $(|a_n| - |a|) \rightarrow 0$. Επεται ότι $(|a_n|) \rightarrow |a|$.

Πρόβλημα 7.6 Βρείτε ένα παράδειγμα που δείχνει ότι η αντίστροφη πρόταση δεν ισχύει.

Το επόμενο αποτέλεσμα λέει ότι εάν μια ακολουθία συγκλίνει τελικά, τότε συγκλίνει. Αρα μπορούμε να συμπληρώσουμε ή να διαγράψουμε οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος όρων στην αρχή της ακολουθίας, χωρίς να αλλάξουμε τις ιδιότητες σύγκλισης της άπειρης ουράς της.

Θεώρημα Εστω N φυσικός αριθμός. Τότε η ακολουθία (a_n) τείνει στο a εάν και μόνον εάν η ακολουθία (a_{N+n}) τείνει στο a .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Εάν $(a_n) \rightarrow a$ γνωρίζουμε ότι υπάρχει N_1 τέτοιο ώστε $|a_n - a| < \varepsilon$ όταν $n > N_1$. Όταν $n > N_1$, τότε $N + n > N_1$, και συνεπώς $|a_{N+n} - a| < \varepsilon$. Αρα $(a_{N+n}) \rightarrow a$.
 Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $(a_{N+n}) \rightarrow a$. Τότε υπάρχει N_2 τέτοιο ώστε $|a_{N+n} - a| < \varepsilon$ όταν $n > N_2$. Όταν $n > N + N_2$, $n - N > N_2$. Συνεπώς $|a_n - a| = |a_{N+(n-N)} - a| < \varepsilon$. Αρα $(a_n) \rightarrow a$.

Παράδειγμα Γνωρίζουμε ότι $(\frac{1}{n}) \rightarrow 0$, άρα $(\frac{1}{n+5}) \rightarrow 0$.

Πρόβλημα 7.7 Αποδείξτε το ανάλογο αποτέλεσμα για ακολουθίες που τείνουν στο άπειρο: $(a_n) \rightarrow \infty$ εάν και μόνον εάν $(a_{N+n}) \rightarrow \infty$.

Δυνάμεις και Ρίζες

Θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα των τελευταίων παραγράφων (συχνά και κάποια δόση πονηριάς) για να αποδείξουμε διάφορα ενδιαφέροντα αποτελέσματα για ακολουθίες με δυνάμεις και ρίζες.

Λήμμα Εάν $x > 0$ τότε $(x^{1/n}) \rightarrow 1$.

Πρόβλημα 7.8 Χρησιμοποιήστε τα ακόλουθα βήματα για να αποδείξετε το Λήμμα:

1. Πρώτα υποθέστε ότι $x \geq 1$, και συμπεράνετε ότι $x^{1/n} \geq 1$.
2. Θέσατε $a_n = x^{1/n} - 1$ και χρησιμοποιήστε την ανισότητα Bernoulli για να αποδείξετε ότι $x \geq 1 + na_n$.
3. Δείξτε ότι $(a_n) \rightarrow 0$.
4. Συμπεράνετε ότι $(x^{1/n}) \rightarrow 1$ όταν $x \geq 1$.
5. Τέλος δείξτε ότι $(x^{1/n}) \rightarrow 1$ και όταν $0 \leq x < 1$.

Λήμμα $(n^{1/n}) \rightarrow 1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Τι συμβαίνει εάν γράψουμε $n = (n^{1/n})^n = (1 + (n^{1/n} - 1))^n$ και εφαρμόσουμε την ανισότητα Bernoulli;

Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν του προηγούμενου Λήμματος, αλλά πρέπει να είμαστε πιο προσεκτικοί, και να δείξουμε πρώτα ότι $(n^{1/2n}) \rightarrow 1$.

Εφόσον $n \geq 1$, έχουμε $n^{1/2n} \geq 1$. Άρα

$$\sqrt{n} = (n^{1/2n})^n = (1 + (n^{1/2n} - 1))^n \geq 1 + n(n^{1/2n} - 1) > n(n^{1/2n} - 1)$$

χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli. Αναδιατάσσουμε και έχουμε $1 \leq n^{1/2n} < \frac{1}{\sqrt{n}} + 1$. Από το Θεώρημα Σάντουιτς, $(n^{1/2n}) \rightarrow 1$. Άρα $(n^{1/n}) = (n^{1/2n})^2 \rightarrow 1$ από τον Κανόνα Γινομένου.

$$\text{Λήμμα} \quad (x^n) \rightarrow \begin{cases} \infty & \text{εάν } x > 1 \\ 1 & \text{εάν } x = 1 \\ 0 & \text{εάν } -1 < x < 1 \end{cases}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Εάν $x > 1$ τότε $x^n = (1 + (x - 1))^n \geq 1 + n(x - 1)$, άρα $(x^n) \rightarrow \infty$.
 Εάν $x = 1$ τότε $x^n = 1$ για κάθε n , άρα $(x^n) \rightarrow 1$.
 Εάν $x = 0$ τότε $x^n = 0$ για κάθε n , άρα $(x^n) \rightarrow 0$.
 Εάν $|x| < 1$ και $x \neq 0$ τότε $\frac{1}{|x|} > 1$, άρα $\left(\left(\frac{1}{|x|}\right)^n\right) \rightarrow \infty$. Επεται ότι $(|x^n|) = \left(\frac{1}{|x|^n}\right) \rightarrow 0$ και άρα $(x^n) \rightarrow 0$.

$$\text{Πρόβλημα 7.9} \quad \text{Δείξτε ότι } (n^x) \rightarrow \begin{cases} \infty & \text{εάν } x > 0 \\ 1 & \text{εάν } x = 0 \\ 0 & \text{εάν } x < 0 \end{cases}$$

Πρόβλημα 7.10 Βρείτε το όριο της ακολουθίας $(x^n + y^n)^{1/n}$ όταν $0 \leq x \leq y$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Παρεμβολής).

Το πρόβλημα 7.10 να παραδοθεί για διόρθωση, στην αρχή του επόμενου εργαστηρίου.

Quiz Ο καθηγητής φθάνει καθυστερημένος στην τάξη, και κοιτάει το ρολόι του. “Πρέπει να το διορθώσω” λέει. “Έχω προσέξει ότι ο λεπτοδείκτης και ο ωροδείκτης συναντώνται ακριβώς κάθε 65 λεπτά”. Το ρολόι του πηγαίνει μπρός ή πίσω, και πόσο κάθε ώρα;