**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**
**Τμήμα Μαθηματικών**

**Εαρινό Εξάμηνο 2011-12**
**Διδάσκων: Χ.Κουρουνιώτης**

# M2822 ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

## Φυλλάδιο 8

## Το κριτήριο λόγου του d'Alembert.

**Πρόβλημα 8.1**

α΄. Υπολογίστε (με το χέρι ή με κομπιουτεράκι) τους όρους της ακολουθίας $(n^2/2^n)$ για $n = 1, 2, 5, 10, 20$. Υποθέτετε ότι η ακολουθία είναι μηδενική;

β΄. Επαληθεύσατε ότι ο λόγος $a_{n+1}/a_n = \frac{1}{2}(1 + 1/n)^2$.

γ΄. Βρείτε έναν ακέραιο $N$ τέτοιο ώστε, εάν $n \geq N$, τότε ο λόγος $a_{n+1}/a_n < \frac{3}{4}$.

δ΄. Χρησιμοποιήστε την παρατήρηση ότι $a_{N+1} < \frac{3}{4}a_N$ και $a_{N+2} < \frac{3}{4}a_{N+1}$, κλπ., για να δείξετε ότι για κάθε $n$, $a_{N+n} < (\frac{3}{4})^n a_N$.

ε΄. Γιατί είναι η ακολουθία $\left((\frac{3}{4})^n a_N\right)$ μηδενική;

ϛ΄. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Παρεμβολής, για να δείξετε ότι η ακολουθία $(n^2/2^n)$ είναι μηδενική.

ζ΄. Ποιούς αριθμούς θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε αντί του $3/4$ στο (γ΄), πιθανώς με διαφορετικό $N$, ώστε να πάρουμε πάλι απόδειξη ότι η ακολουθία είναι μηδενική;

**Πρόβλημα 8.2** Εάν $(a_n)$ είναι μία ακολουθία θετικών όρων, και

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \to l < 1$$

δείξτε ότι, για αρκετά μεγάλο $n$, η ακολουθία $(a_n)$ βρίσκεται μεταξύ του 0 και μίας κατάλληλα επιλεγμένης μηδενικής γεωμετρικής προόδου.
Συμπεράνατε ότι η ακολουθία $(a_n)$ είναι μηδενική.

**Πρόβλημα 8.3** Εάν $(a_n)$ είναι ακολουθία θετικών όρων και

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \to l > 1$$

δείξτε ότι, για αρκετά μεγάλα $n$, οι όροι της ακολουθίας είναι μεγαλύτεροι από τους αντίστοιχους όρους μιας κατάλληλα επιλεγμένης γεωμετρικής προόδου, η οποία τείνει στο $+\infty$.
Συμπεράνατε ότι $(a_n) \to +\infty$.

**Πρόβλημα 8.4** Δώστε ένα παράδειγμα μίας μηδενικής ακολουθίας θετικών όρων $(a_n)$ για την οποία

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \to 1.$$

Δώστε επίσης ένα παράδειγμα μίας ακολουθίας θετικών όρων $(a_n)$ που δεν συγκλίνει, για την οποία

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \to 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνθήκη πως ο λόγος των διαδοχικών όρων τείνει στο 1 δεν καθορίζει το εάν συγκλίνει η αρχική ακολουθία.

**Θεώρημα** Κριτήριο Λόγου του d'Alembert

Θεωρούμε μια ακολουθία $(a_n)$ και υποθέτουμε οτι η ακολουθία $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \to \ell$. Εάν

α′. $-1 < \ell < 1$ τότε $(a_n) \to 0$.

β′. $\ell > 1$ και $a_n > 0$ τότε $(a_n) \to \infty$.

γ′. $\ell > 1$ και $a_n < 0$ τότε $(a_n) \to -\infty$.

δ′. $\ell < -1$ τότε η ακολουθία δεν συγκλίνει, ούτε τείνει στο $\pm\infty$.

ε′. $\ell = \pm 1$ τότε δεν έχουμε κανένα συμπέρασμα.

**Πρόβλημα 8.5** Χρησιμοποιήστε τις απαντήσεις στα προηγούμενα Προβλήματα για να αποδείξετε το Κριτήριο Λόγου του d'Alembert.

**Πρόβλημα 8.6** Βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

$$\left(\frac{n^2 10^n + n^3 9^n}{7^{2n} + 1}\right)$$

$$\left(\left(4^{10} + 2^n\right)^{1/n}\right)$$

$$\left(\frac{3n^3 + n\cos^2 n}{n^2 + \sin^2 n}\right)$$

$$\left(\left(3n^2 + n\right)^{1/n}\right)$$

## Ακολουθίες σε διαστήματα.

**Πρόβλημα 8.7** Εάν $(a_n) \to a$, $0 \leq a_n$ και $a \leq 0$, χρησιμοποιήστε την ανισότητα $0 \leq a_n \leq a_n - a$ για να δείξετε ότι $a = 0$.
Συμπεράνατε ότι, εάν $(a_n) \to a$ και $0 \leq a_n$, τότε υποχρεωτικά $0 \leq a$.

**Πρόβλημα 8.8** Εάν $(a_n) \to a$, $(b_n) \to b$ και $a_n \leq b_n$ για κάθε $n$, εξετάστε την ακολουθία $(b_n - a_n)$ για να δείξτε ότι $a \leq b$.

**Πρόβλημα 8.9** Εξετάστε τις ακολουθίες που ορίζονται από $a_n = -1/n$ και $b_n = 1/n$ για να αποδείξετε ότι, ακόμα και αν $a_n < b_n$ για όλα τα $n$, $(a_n) \to a$ και $(b_n) \to b$ δεν συνεπάγεται ότι $a < b$.

**Θεώρημα** Υποθέτουμε οτι $(a_n) \to a$ και $(b_n) \to b$. Εάν τελικά $a_n \leq b_n$, τότε $a \leq b$.

**Πρόβλημα 8.10** Εάν $(a_n) \to a$ και $A \leq a_n \leq B$ για όλα τα $n$, αποδείξτε ότι $A \leq a \leq B$.
Αυτός είναι ο λόγος που ονομάζουμε το διάστημα $\{x|A \leq x \leq B\}$ **κλειστό**: καμία συγκλίνουσα ακολουθία μέσα στο διάστημα δεν μπορεί να έχει όριο που βρίσκεται έξω από το διάστημα.
Δώστε ένα παράδειγμα για να δείξτε ότι εάν $(a_n) \to a$ και $A < a_n < B$ για όλα τα $n$, δεν έπεται ότι $A < a < B$.
Το διάστημα $\{x|A < x < B\}$ ονομάζεται **ανοικτό**, γιατί μια συγκλίνουσα ακολουθία στο διάστημα μπορεί να έχει όριο έξω από το διάστημα.

**Πόρισμα** Υποθέτουμε οτι $(a_n) \to a$. Εάν τελικά $A \leq a_n \leq B$, τότε $A \leq a \leq B$.