ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2011-12
Διδάσκων: Χ.Κουρουνιώτης

M2822 ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Φυλλάδιο 9

Δεκαδικοί, Ρητοί και Πραγματικοί Αριθμοί

Ορισμός Ακέραιο μέρος

Εάν a είναι ένας πραγματικός αριθμός, ονομάζουμε *ακέραιο μέρος* του a, και το συμβολίζουμε $[a]$, τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος με το a, και άρα ικανοποιεί τις ανισότητες

$$[a] \leq a < [a] + 1$$

Παράδειγμα $[3/2] = 1, \; [-3/2] = -2$

Πρόβλημα 9.1 Εάν a και b είναι δύο πραγματικοί αριθμοί, και $a < b$, δείξτε οτι υπάρχει πάντα ένας ρητός της μορφής $m/2^n$ μεταξύ των αριθμών a και b, όπου m είναι ένας ακέραιος και n είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος: δείξτε οτι υπάρχει k τέτοιο ώστε $1/2^k < b - a$, και χρησιμοποιήστε τις ανισότητες $[2^k a] \leq a2^k < [2^k a] + 1$ για να δείξετε οτι $m = [2^k a] + 1$ και $n = k$ ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες.

Πρόβλημα 9.2 Δείξτε ότι μεταξύ κάθε δύο διαφορετικών αριθμών στην ευθεία υπάρχει ένα άπειρο πλήθος αριθμών της μορφής $m/2^n$, όπου m είναι ακέραιος και n είναι μη αρνητικός ακέραιος.

Ορισμός Δεκαδικοί Αριθμοί

Ονομάζουμε *δεκαδικούς αριθμούς* τους ρητούς αριθμούς της μορφής $m/10^n$ όπου m είναι ακέραιος και n είναι μη αρνητικός ακέραιος,

$$D = \{m/10^n \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$$

Πρόβλημα 9.3 Αποδείξτε ότι, για κάθε a,

$$0 \leq a - \frac{[10^n a]}{10^n} < \frac{1}{10^n}.$$

Συμπεράνατε ότι για οποιονδήποτε αριθμό a σε ένα Αρχιμήδειο διατεταγμένο σώμα, υπάρχει μια ακολουθία ρητών αριθμών που τείνει προς τον a.

Ορισμός Δεκαδική Ακολουθία

Ονομάζουμε *δεκαδική ακολουθία* (ή *άπειρο δεκαδικό αριθμό*) μία ακολουθία (a_n), μέ όρους

$$a_n = d_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \ldots + \frac{d_n}{10^n},$$

όπου d_0 είναι ένας ακέραιος και για $i \geq 1$, d_i είναι ένας ακέραιος με $0 \leq d_i \leq 9$.
Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$a_n = d_0.d_1d_2d_3 \ldots d_n$$

που παραπέμπει στη συνήθη γραφή των δεκαδικών αριθμών όταν $d_0 \geq 0$. Προσέξτε οτι αυτός ο συμβολισμός διαφέρει από τη συνήθη γραφή των αρνητικών δεκαδικών αριθμών: ο αριθμός $-0,25$ συμβολίζεται $(-1).75$.

Πρόβλημα 9.4 Δείξτε οτι, για κάθε πραγματικό αριθμό a, η ακολουθία $([10^n a]/10^n)$ είναι μια δεκαδική ακολουθία. Συμπεράνετε οτι κάθε πραγματικός αριθμός είναι το όριο μιας δεκαδικής ακολουθίας.

Πρόβλημα 9.5 Αποδείξτε οτι κάθε δεκαδική ακολουθία είναι αύξουσα. Δείξτε επίσης οτι για κάθε m, $a_m + (1/10^m)$ είναι άνω φράγμα της δεκαδικής ακολουθίας (a_n).

Ορισμός Αναδρομική δεκαδική ακολουθία

Μία δεκαδική ακολουθία (a_n) ονομάζεται *αναδρομική* εάν η ακολουθία των δεκαδικών ψηφίων (d_n) είναι τελικά περιοδική, δηλαδή εάν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί n_0 και k τέτοιοι ώστε για κάθε φυσικό αριθμό m να ισχύει

$$d_{n_0+m} = d_{n_0+m+k}$$

Θα δείξουμε οτι κάθε αναδρομική δεκαδική ακολουθία συγκλίνει σε ένα ρητό αριθμό. Συμβολίζουμε το όριο μίας αναδρομικής δεκαδικής ακολουθίας με τελείες πάνω από τα επαναλαμβανόμενα δεκαδικά ψηφία. Για παράδειγμα $1.23\dot{4}5\dot{6}$ είναι το όριο της δεκαδικής ακολουθίας με $a_{2+3k} = 1.23456456\ldots456$.

Πρόβλημα 9.6 Κάνετε τη διαίρεση $333 : 22$, και παρατηρήστε πώς προκύπτουν τα επαναλαμβανόμενα δεκαδικά ψηφία.

Πρόβλημα 9.7 Δείξτε οτι $0.\dot{9} = 1$. Προσέξτε τη χρήση των ορίων: η αριστερή πλευρά συμβολίζει το όριο μιας αναδρομικής δεκαδικής ακολουθίας.

Πρόβλημα 9.8 Θεωρείστε τον δεκαδικό αριθμό $a = \frac{m}{10^n}$, όπου m είναι θετικός ακέραιος που δεν είναι πολλαπλάσιο του 10, και τη δεκαδική ακολουθία (a_k)

$$a_k = \frac{[10^k a]}{10^k} = d_0.d_1d_2d_3\ldots d_k\,.$$

Ορίζουμε και τη δεκαδική ακολουθία (b_k) με $b_k = c_0.c_1c_2c_3\ldots c_k$ για την οποία

$$c_i = \begin{cases} d_i & \text{εάν } 0 \leq i < n \\ d_n - 1 & \text{εάν } i = n \\ 9 & \text{εάν } i > n \end{cases}$$

1. Δείξτε οτι $d_k = 0$ για $k > n$ και συνεπώς οτι η ακολουθία (a_k) είναι τελικά σταθερή.

2. Δείξτε οτι $b_k \to a$.

Συμπεράνετε οτι εάν a είναι δεκαδικός αριθμός, υπάρχουν δύο διαφορετικές δεκαδικές ακολουθίες οι οποίες συγκλίνουν στον a.

Πρόβλημα 9.9 Δείξτε οτι

$$123.45\dot{6}\dot{7}\dot{8}\dot{9} = \frac{1}{10^2}\left(12345 + \frac{6789}{9999}\right)\,.$$

Θεώρημα Ενας αριθμός a είναι ρητός εάν και μόνον εάν a είναι το όριο μιας αναδρομικής δεκαδικής ακολουθίας.

Το Θεώρημα θα αποδειχθεί στην επόμενη διάλεξη.