

M2822 ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Παρατηρήσεις

1. Διαβάστε προσεκτικά όλα τα θέματα πριν αρχίσετε να απαντάτε.
2. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι σαφείς, σύντομες και πλήρως αιτιολογημένες.
3. Γράψετε σε διαφορετική σελίδα την απάντηση κάθε θέματος. Συνιστάται να γράφετε τις απαντήσεις μόνο στη δεξιά σελίδα, και να χρησιμοποιείτε την αριστερή για πρόχειρους υπολογισμούς (ή το αντίθετο αν είστε αριστερόχειρες).
4. Πρέπει να παραδώσετε όλες τις κόλλες που χρησιμοποιήσατε.
5. Η εξέταση διαρκεί 2 ώρες. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ Η ΕΞΟΔΟΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΙΘΟΥΣΑ. Την πρώτη ώρα απαγορεύεται η αποχώρηση από την εξέταση.
6. Οι βαθμοί κάθε θέματος δίδονται σε παρένθεση. Ο μέγιστος βαθμός είναι 70, η βάση είναι 35.

ΘΕΜΑ 1 (20)

Στα επόμενα, (a_n) είναι μια ακολουθία που τείνει στο $+\infty$. Ποιές από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς και ποιές ψευδείς. Δώστε σύντομη αιτιολόγηση για τις αληθείς και αντιπαράδειγμα για τις ψευδείς.

1. Η (a_n) είναι τελικά αύξουσα.
2. Η (a_n) έχει το πολύ πεπερασμένο πλήθος αρνητικών όρων.
3. Η (a_n) δεν είναι κάτω φραγμένη.
4. Κάθε υπακολουθία της (a_n) είναι κάτω φραγμένη.
5. Δεν υπάρχει υπακολουθία της (a_n) που να είναι άνω φραγμένη.

ΘΕΜΑ 2 (15)

1. Δώστε τον ορισμό της μηδενικής και της φραγμένης ακολουθίας.
2. Εάν (a_n) είναι μηδενική ακολουθία και (b_n) είναι φραγμένη ακολουθία, δείξτε ότι η ακολουθία $(a_n b_n)$ είναι μηδενική.

ΘΕΜΑ 3 (20)

Σε ποιές από τις ακόλουθες περιπτώσεις μπορώ να συμπεράνω ότι η ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_n) έχει τουλάχιστον μια **συγκλίνουσα υπακολουθία**. Εάν ναι, δώστε σύντομη αιτιολόγηση· εάν όχι, δώστε αντιπαράδειγμα.

1. Εάν (a_n) είναι φραγμένη.
2. Εάν (a_n) είναι άνω φραγμένη και μονότονη.
3. Εάν (a_n) είναι κάτω φραγμένη και γνήσια φθίνουσα.
4. Εάν ισχύει $(\frac{a_{n+1}-2}{a_n-2}) \rightarrow \frac{-1}{3}$.
5. Εάν για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ισχύει $a_{k^2} = a_k$.

ΘΕΜΑ 4 (15)

1. Δώστε τον ορισμό της φθίνουσας ακολουθίας, της κάτω φραγμένης ακολουθίας, και της ακολουθίας που τείνει στο $-\infty$.
2. Δείξτε ότι μια φθίνουσα ακολουθία που δεν είναι κάτω φραγμένη, τείνει στο $-\infty$.