

M2822 ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Παρατηρήσεις

1. Διαβάστε προσεκτικά όλα τα θέματα πριν αρχίσετε να απαντάτε.
2. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι σαφείς, σύντομες και πλήρως αιτιολογημένες.
3. Γράψετε σε διαφορετική σελίδα την απάντηση κάθε θέματος. Συνιστάται να γράφετε τις απαντήσεις μόνο στη δεξιά σελίδα, και να χρησιμοποιείτε την αριστερή για πρόχειρους υπολογισμούς (ή το αντίθετο αν είστε αριστερόχειρες).
4. Πρέπει να παραδώσετε όλες τις κόλλες που χρησιμοποιήσατε.
5. Η εξέταση διαρκεί 2 ώρες. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ Η ΕΞΟΔΟΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΙΘΟΥΣΑ. Την πρώτη ώρα απαγορεύεται η αποχώρηση από την εξέταση.
6. Οι βαθμοί κάθε θέματος δίδονται σε παρένθεση. Ο μέγιστος βαθμός είναι 70, η βάση είναι 35.

ΘΕΜΑ 1 (15)

1. Ποιές από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς και ποιές ψευδείς. Δώστε σύντομη αιτιολόγηση εάν είναι αληθής και αντιπαράδειγμα εάν είναι ψευδής.
 1. Το άθροισμα δύο άρρητων αριθμών είναι άρρητος.
 2. Το άθροισμα δύο άρρητων αριθμών είναι ρητός.
2. Βρείτε μια ακολουθία που αποτελείται από άρρητους αριθμούς και συγκλίνει στο 0.
3. Υπάρχει ακολουθία που αποτελείται από άρρητους αριθμούς και συγκλίνει στο 1; Εάν υπάρχει, δώστε παράδειγμα.

ΘΕΜΑ 2 (20)

Στα επόμενα, (a_n) είναι μια ακολουθία που συγκλίνει με όριο $\sqrt{2}$. Ποιές από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς και ποιές ψευδείς. Δώστε σύντομη αιτιολόγηση για τις αληθείς και αντιπαράδειγμα για τις ψευδείς.

1. Υπάρχει τουλάχιστον ένας όρος της ακολουθίας που είναι άρρητος.
2. Υπάρχουν άπειροι όροι της ακολουθίας που είναι άρρητοι.
3. Η (a_n) είναι φραγμένη.
4. Το πλήθος των αρνητικών όρων της ακολουθίας είναι πεπερασμένο.
5. Το πλήθος των όρων της ακολουθίας που ικανοποιούν $a_n^2 > 2$ είναι πεπερασμένο.
6. Η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη, και κάθε κάτω φράγμα είναι $\leq \frac{14}{10}$.

ΘΕΜΑ 3 (20)

Θεωρούμε ακολουθίες (a_n) και (b_n) και υποθέτουμε ότι για κάθε n , $b_n \neq 0$. Σε ποιές από τις ακόλουθες περιπτώσεις μπορώ να συμπεράνω ότι η ακολουθία (a_n/b_n) συγκλίνει; Εάν ναι, δώστε σύντομη αιτιολόγηση· εάν όχι, δώστε αντιπαράδειγμα.

1. Εάν η (a_n) και η (b_n) είναι συγκλίνουσες.
2. Εάν η (a_n) συγκλίνει και η (b_n) είναι φραγμένη.
3. Εάν η (a_n) είναι μηδενική.
4. Εάν η (a_n) είναι μηδενική και η (b_n) είναι άνω φραγμένη από τον αριθμό $k < 0$.
5. Εάν η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy, η (b_n) είναι φθίνουσα ακολουθία και για κάθε n , $b_n \geq 1$.

ΘΕΜΑ 4 (20)

1. Δώστε τον ορισμό της φθίνουσας ακολουθίας, της κάτω φραγμένης ακολουθίας, και της ακολουθίας που τείνει στο $-\infty$.
2. Δείξτε ότι μια φθίνουσα ακολουθία που δεν είναι κάτω φραγμένη, τείνει στο $-\infty$.