

M1124 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εργαστήριο Προβλημάτων 1

Τρίτη, 4/10/2011

Άσκηση 1.1 Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς και ποιές ψευδείς; Εξηγήστε σύντομα την απάντησή σας.

- α'. $\{1, 4, 2, 3\} = \{2, 3, 1, 4, 3, 2\}$ β'. $\{a, b, d, d\} = \{a, b, c, d\}$
γ'. $\{a, b, d, d\} = \{a, b, a, d\}$ δ'. $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2x = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x = 0\}$
ε'. $1 \subseteq \{1, 2\}$ ε'. $\{3, 1\} \subseteq \{1, 5, 2, 3\}$
ζ'. $\emptyset \in \{\emptyset\}$ η'. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Άσκηση 1.2 Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις, διαλέξτε ποιό από τα σύμβολα \in ή \subseteq δίδει μια αληθή πρόταση. Εξηγήστε γιατί, σε κάθε περίπτωση, το άλλο σύμβολο δεν δίδει αληθή πρόταση.

- α'. $\{a, b\} \in / \subseteq \{a, \{a, b, c\}, b\}$
β'. $\{a, \emptyset\} \in / \subseteq \{a, \{a, \emptyset\}\}$
γ'. $\emptyset \in / \subseteq \{a, \{a, \emptyset\}\}$

Άσκηση 1.3 Εξετάστε εάν οι ακόλουθες προτάσεις ισχύουν για οποιαδήποτε σύνολα A, B, C .

- α'. Εάν $A \in B$ και $B \subseteq C$, τότε $A \in C$.
β'. Εάν $A \in B$ και $B \subseteq C$, τότε $A \subseteq C$.
γ'. Εάν $A \subseteq B$ και $B \in C$, τότε $A \subseteq C$.

Εάν ισχύουν δώστε απόδειξη. Εάν δεν ισχύουν, βρείτε αντιπαράδειγμα. Για όσες προτάσεις δεν ισχύουν για οποιαδήποτε σύνολα, μπορείτε να βρείτε παράδειγμα όπου να αληθεύουν και οι τρεις σχέσεις της πρότασης;

Άσκηση 1.4 Θεωρήστε τα υποσύνολα του επιπέδου

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2\}, \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3\}$$

Θα επαληθεύσουμε τον επιμεριστικό νόμο

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

- α'. Σχεδιάστε τα A , B , και C .
- β'. Σχεδιάστε τα $D = B \cap C$, $E = A \cup B$, και $F = A \cup C$.
- γ'. Σχεδιάστε τα $A \cup D$ και $E \cap F$ και παρατηρήστε ότι είναι ίσα.
- δ'. Με ανάλογο τρόπο, επαληθεύστε τον επιμεριστικό νόμο

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Άσκηση 1.5 Σχεδιάστε τα διαγράμματα Venn στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- α'. Έχουμε δύο σύνολα A και B τέτοια ώστε $(A \cup B) \subseteq B$ και $B \not\subseteq A$.
- β'. Έχουμε τρία σύνολα A , B και C τέτοια ώστε $A \cap B \cap C = \emptyset$, $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$ και $B \cap C \neq \emptyset$.

Άσκηση 1.6 Δώστε ένα παράδειγμα συνόλων A , B και C τέτοιων ώστε $A \in B$, $B \in C$ και $A \notin C$.

Άσκηση 1.7 Έστω A , B , C υποσύνολα κάποιου συνόλου U και $x \in U$. Δίνεται ότι $A \cup B \subseteq C$. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι πάντα αληθείς και ποιές όχι; Για τις αληθείς δώστε σύντομη αιτιολόγηση, για τις υπόλοιπες βρείτε αντιπαράδειγμα.

- α'. $x \in C \Rightarrow x \in A \cup B$
- β'. $x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin C$
- γ'. $x \in A \cup B \Rightarrow x \in C$
- δ'. $x \notin C \Rightarrow x \notin A \cup B$
- ε'. $x \in A \cap B \Rightarrow x \in C$
- ς'. $x \notin C \Rightarrow x \notin A$
- ζ'. $x \notin C \Rightarrow (x \notin A \text{ και } x \notin B)$

Άσκηση 1.8 Εάν $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ και $B = \{a, \{a\}, b\}$, προσδιορίστε για κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις εάν είναι αληθής ή ψευδής:

- α'. $\emptyset \in \mathfrak{P}(A)$
- β'. $\emptyset \subseteq \mathfrak{P}(A)$
- γ'. $\{\emptyset\} \in \mathfrak{P}(A)$
- δ'. $\{\{a\}\} \in \mathfrak{P}(B)$
- ε'. $\{\{a\}\} \subseteq \mathfrak{P}(B)$
- ς'. $\{\{a\}, b\} \subseteq \mathfrak{P}(B)$
- ζ'. $\{\{a\}, \{\{a\}\}\} \subseteq \mathfrak{P}(B)$