ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2011-12
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

M1124 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εργαστήριο Προβλημάτων 11

Τρίτη, 20/12/2011

***Άσκηση* 11.1** Θεωρήστε το σύνολο X των σημείων $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ για τα οποία $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Είναι το X αριθμήσιμο;

***Άσκηση* 11.2** Ποιά από τα ακόλουθα σύνολα είναι αριθμήσιμα; (Δώστε απόδειξη σε κάθε περίπτωση).

α′. $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ είναι πρώτος}\}$

β′. $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 10^{-1000000}\}$

γ′. $\mathbb{C}$

δ′. $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 = 2^a 3^b \text{ για κάποια } a,\, b \in \mathbb{N}\}$

***Άσκηση* 11.3** Δίδονται τα σύνολα $A = \mathbb{N}_0 \times \{\kappa\}$ και $B = \mathbb{N}_0 \times \{\kappa, \lambda\}$. Εξετάστε εάν οι ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Δώστε σύντομη αιτιολόγηση της απάντησής σας.

α′. Το A είναι υποσύνολο του B.

β′. Το B έχει περισσότερα στοιχεία από το A.

γ′. Το B έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το $A \times A$.

***Άσκηση* 11.4** Αποδείξτε ότι κάθε σύνολο ξένων διαστημάτων στο $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο. **Υπόδειξη:** Για κάθε δύο πραγματικούς αριθμούς $a < b$, υπάρχει ρητός αριθμός q τέτοιος ώστε $a < q < b$.

Χρησιμοποιήστε το παραπάνω για να αποδείξετε ότι το σύνολο σημείων ασυνέχειας μιας αύξουσας $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο. **Υπόδειξη:** Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα, τότε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια της f στο a και

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \le \lim_{x \to a^+} f(x)\,.$$

***Άσκηση* 11.5** Αποδείξτε ότι η $J : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ με

$$J(n, m) = 2^n(2m + 1) - 1$$

είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση. Αυτή η συνάρτηση δίδει μία απαρίθμηση των στοιχείων του $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ διαφορετική από αυτήν που είδαμε στη διάλεξη. **Υπόδειξη:** Για να βρείτε το ζεύγος $(n\,, m)$ το οποίο απεικονίζεται στον φυσικό αριθμό k, εξετάστε τη μεγαλύτερη δύναμη του 2 η οποία διαιρεί το $k+1$.

Άσκηση 11.6 Έστω A σύνολο. Για κάθε $Y \subseteq A$ η **χαρακτηριστική συνάρτηση** του Y ορίζεται ως εξής

$$\chi_Y(t) = \begin{cases} 1 \text{ αν } t \in Y \\ 0 \text{ αν } t \notin Y \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $F : \mathfrak{P}(A) \longrightarrow \{0,\, 1\}^A$ με $F(Y) = \chi_Y$ είναι αμφιμονοσήμαντη. (B^A συμβολίζει το σύνολο των συναρτήσεων από το A στο B).