

M1124 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εργαστήριο Προβλημάτων 2

Τρίτη, 11/10/2011

Άσκηση 2.1 Σε μία πόλη, στις δημοτικές εκλογές υπήρχαν τρεις υποψήφιοι δήμαρχοι, ο κ. Αλφα, η κ. Βήτα και ο κ. Γάμμα. Στον πρώτο γύρο πλειοψήφισαν ο κ. Αλφα και η κ. Βήτα. A είναι το σύνολο των ψηφοφόρων που ψήφισαν τον κ. Αλφα στον πρώτο γύρο, B είναι το σύνολο των ψηφοφόρων που ψήφισαν την κ. Βήτα στον πρώτο γύρο, Γ είναι το σύνολο των ψηφοφόρων που ψήφισαν τον κ. Γάμμα στον πρώτο γύρο, A' είναι το σύνολο των ψηφοφόρων που ψήφισαν τον κ. Αλφα στο δεύτερο γύρο, B' είναι το σύνολο των ψηφοφόρων που ψήφισαν την κ. Βήτα στο δεύτερο γύρο, Δ είναι το σύνολο των ψηφοφόρων που είχαν ψηφίσει στις βουλευτικές εκλογές το κόμμα που υποστήριζε την κ. Βήτα και E είναι το σύνολο των ψηφοφόρων που εκκλησιάζονται τακτικά. Ζητάται να εκφράσετε με συνολοθεωρητικό τρόπο τις ακόλουθες προτάσεις (για παράδειγμα, η πρόταση 'Οι ψηφοφόροι του κ. Γάμμα στο δεύτερο γύρο ψήφισαν την κ. Βήτα' εκφράζεται από τη συνολοθεωρητική σχέση $\Gamma \subseteq B'$):

- α'. Οι ψηφοφόροι του κ. Γάμμα που είχαν ψηφίσει στις βουλευτικές εκλογές το κόμμα που υποστήριζε την κ. Βήτα, στο δεύτερο γύρο ψήφισαν την κ. Βήτα.
- β'. Οι ψηφοφόροι που εκκλησιάζονται τακτικά και δεν είχαν ψηφίσει στις βουλευτικές εκλογές το κόμμα που υποστήριζε την κ. Βήτα, στο δεύτερο γύρο ψήφισαν τον κ. Αλφα.
- γ'. Οι ψηφοφόροι που είχαν ψηφίσει στις βουλευτικές εκλογές το κόμμα που υποστήριζε την κ. Βήτα και δεν εκκλησιάζονται τακτικά, ψήφισαν στον πρώτο γύρο είτε την κ. Βήτα είτε τον κ. Γάμμα.

Άσκηση 2.2 Βρείτε τα σύνολα $\mathfrak{P}(\emptyset)$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset))$ και $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset)))$. ($\mathfrak{P}(A)$ είναι το δυναμοσύνολο του A , δηλαδή το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A .)

Άσκηση 2.3 Αποδείξτε ότι οι ακόλουθες σχέσεις ισχύουν για οποιαδήποτε υποσύνολα A , B και C του χώρου U :

- α'. $B \setminus A^c = B \cap A$.
- β'. $A^c \setminus B^c = B \setminus A$.
- γ'. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Άσκηση 2.4 Αποδείξτε ότι οι ακόλουθες σχέσεις ισχύουν για οποιαδήποτε σύνολα A και B :

$$\alpha'. \mathfrak{P}(A) \cap \mathfrak{P}(B) = \mathfrak{P}(A \cap B).$$

$$\beta'. \mathfrak{P}(A) \cup \mathfrak{P}(B) \subseteq \mathfrak{P}(A \cup B).$$

Βρείτε ένα παράδειγμα για να δείξετε ότι στο (β') δεν ισχύει πάντα η ισότητα, και ένα παράδειγμα όπου στο (β') ισχύει η ισότητα.

Άσκηση 2.5 Δείξτε ότι εάν A και B είναι οποιαδήποτε σύνολα,

$$(A \Delta B) \Delta A = B.$$

(Χρησιμοποιήστε ένα κατάλληλο διάγραμμα Venn για να σας βοηθήσει να διατυπώσετε την απόδειξη. Η απόδειξη όμως δεν μπορεί να βασίζεται στο διάγραμμα Venn. Χρησιμοποιήστε τον ορισμό ή τους κανόνες De Morgan.)

Χρησιμοποιήστε το προηγούμενο αποτέλεσμα για να δείξετε ότι εάν A , B και C είναι (οποιαδήποτε) σύνολα και $A \Delta B = A \Delta C$ τότε $B = C$ (λέμε ότι η πράξη Δ έχει την ιδιότητα απαλοιφής).

Άσκηση 2.6 Ισχύει η ισότητα $A \Delta (B \cap C) = (A \Delta B) \cap (A \Delta C)$ για όλα τα σύνολα A , B , C ;

Άσκηση 2.7 Πρόβλημα για γερούς λύτες. (Επιχειρήστε το μόνον εάν τελειώσετε όλες τις προηγούμενες ασκήσεις).

Δείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο X τέτοιο ώστε $\mathfrak{P}(X) \subseteq X$.