

## M1124 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

### Εργαστήριο Προβλημάτων 4

Τρίτη, 25/10/2011

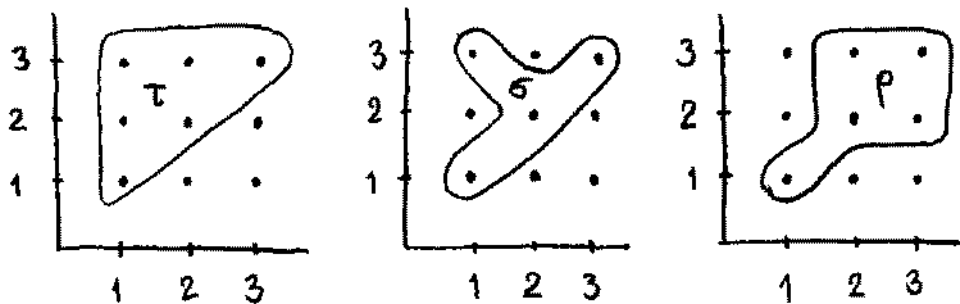
**Άσκηση 4.1** Δίδεται το σύνολο  $A = \{a, b, c, d, e\}$  και η σχέση  $\sigma = \{(a, c), (b, e)\}$ .

α'. Βρείτε την ελάχιστη σχέση ισοδυναμίας  $\rho$  στο σύνολο  $A$ , (δηλαδή αυτήν με τα λιγότερα στοιχεία του  $A \times A$ ) που περιέχει τη  $\sigma$ , (δηλαδή  $\sigma \subseteq \rho$ ). Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η  $\rho$  είναι η σχέση ισοδυναμίας που **παράγεται** από τη  $\sigma$ .

β'. Βρείτε τη διαμέριση του  $A$  που αντιστοιχεί στη  $\rho$ .

**Άσκηση 4.2** Θεωρούμε το σύνολο  $A = \{1, 2, 3\}$ .

α'. Πώς συμβολίζουμε συνήθως τη σχέση που ορίζεται από το υποσύνολο  $\tau$  του  $A \times A$ ;



Σχήμα 1:

β'. Για κάθε μια από τις σχέσεις  $\rho$  και  $\sigma$  στο  $A$ , εξετάστε εάν είναι ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική.

γ'. Εάν κάποια από τις σχέσεις  $\rho$ ,  $\sigma$  είναι σχέση ισοδυναμίας, ποιά είναι η αντίστοιχη διαμέριση του  $A$ ;

**Άσκηση 4.3** Έστω  $\tau_1$  και  $\tau_2$  δύο μεταβατικές σχέσεις πάνω σε σύνολο  $A$ . Είναι η σχέση  $\tau_1 \cap \tau_2$  πάνω στο  $A$  μεταβατική ;

**Άσκηση 4.4** Το ρολόι μου πάει κάθε ώρα είκοσι λεπτά μπροστά. Αν δείχνει τώρα ότι η ώρα είναι ακριβώς μεσημέρι, που θα βρισκείται ο λεπτοδείκτης μετά από 123454321 ώρες; Υπόδειξη: Θυμηθείτε πώς ελέγχουμε εάν ένας αριθμός διαιρείται με το 3, 4, 5, 8, κ.λπ.

**Άσκηση 4.5** Στο σύνολο  $\mathbb{N}$  των φυσικών αριθμών, θεωρούμε τη σχέση

$$m \sigma n \quad \text{εάν και μόνον εάν } m \text{ διαιρεί } n,$$

δηλαδή εάν υπάρχει  $q \in \mathbb{N}$  τέτοιο ώστε  $n = mq$ . Είναι η σχέση  $\sigma$  κάποιου είδους διάταξη; (ασθενής; γνήσια; μερική;)

**Άσκηση 4.6** Στο σύνολο  $A$  έχουμε μία σχέση γνήσιας διάταξης  $\tau$ , και ορίζουμε στο σύνολο  $A \times A$  τη σχέση  $\rho$ :

$$(a, b) \rho (c, d) \quad \text{εάν και μόνον εάν είτε } a \tau c \text{ είτε } a = c \text{ και } b \tau d.$$

Δείξτε ότι  $\rho$  είναι σχέση γνήσιας διάταξης. Γιατί ονομάζεται αυτή η σχέση 'λεξικογραφική';

**Άσκηση 4.7** Ορίζουμε τη σχέση  $\rho$  σε ευθείες του επιπέδου, με  $x \rho y$  αν και μόνο αν  $x$  τέμνει την  $y$ . Είναι η  $\rho$  σχέση μερικής διάταξης;

**Άσκηση 4.8** Στο σύνολο  $K = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ , όπου  $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , θεωρούμε τη σχέση  $\approx$  με:

$$(k, l) \approx (m, n) \quad \text{εάν και μόνον εάν } k \cdot n = l \cdot m.$$

α'. Δείξτε ότι η  $\approx$  είναι σχέση ισοδυναμίας στο  $K$ .

β'. Μπορείτε να βρείτε κάποια αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των κλάσεων ισοδυναμίας αυτής της σχέσης και του συνόλου  $\mathbb{Q}$  των ρητών αριθμών;

γ'. Δείξτε ότι αν  $(k, l) \approx (k', l')$  και  $(m, n) \approx (m', n')$  τότε  $(km, ln) \approx (k'm', l'n')$  και  $(kn + lm, ln) \approx (k'n' + l'm', l'n')$

δ'. Χρησιμοποιήστε το προηγούμενο ερώτημα για να ορίσετε δύο πράξεις στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας. Είναι οι πράξεις 'καλά ορισμένες'; Σε ποιές πράξεις στο σύνολο των ρητών αριθμών αντιστοιχούν;