

M1124 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εργαστήριο Προβλημάτων 6

Τρίτη, 8/11/2011

Άσκηση 6.1 Δίδονται οι συναρτήσεις f , g και h από τους φυσικούς αριθμούς στους φυσικούς αριθμούς, που ορίζονται από:

$$\alpha'. f(n) = n + 1$$

$$\beta'. g(n) = 2n$$

$$\gamma'. h(n) = \begin{cases} 0 & \text{εάν } n \text{ είναι άρτιος} \\ 1 & \text{εάν } n \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

Καθορίστε τις συναρτήσεις $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ h$, $h \circ g$ και $(f \circ g) \circ h$.

Άσκηση 6.2 Δίδονται συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε να ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$. Δείξτε ότι

α' . Εάν η $g \circ f$ είναι επεικονική, τότε η g είναι επεικονική.

β' . Εάν η $g \circ f$ είναι ενεικονική, τότε η f είναι ενεικονική.

γ' . Βρείτε παραδείγματα συναρτήσεων f και g για να δείξετε ότι δεν ισχύουν οι αντίστροφες συνεπαγωγές, δηλαδή ότι εάν η g είναι επεικονική ή εάν η f είναι ενεικονική, δεν ισχύει υποχρεωτικά το ίδιο για τη σύνθεση $g \circ f$.

Άσκηση 6.3 Εάν $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow C$ είναι αμφιμονοσήμαντες, τότε η σύνθεση $g \circ f : A \rightarrow C$ είναι αμφιμονοσήμαντη. Πιο συγκεκριμένα, δείξτε ότι εάν f και g είναι ενεικονικές, τότε $g \circ f$ είναι ενεικονική, και ότι εάν f και g είναι επεικονικές, τότε $g \circ f$ είναι επεικονική.

Άσκηση 6.4 Εάν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $f(x) = \tan x$, τί είδους μονόπλευρο αντίστροφο έχει η f ; Βρείτε το πεδίο ορισμού και την εικόνα αυτού του μονόπλευρου αντιστρόφου.

Άσκηση 6.5 Δίδονται τα σύνολα $A = \{p, q, r\}$ και $B = \{w, x, y, z\}$ και η συνάρτηση $h : B \rightarrow A$

$$h = \{(w, p), (x, r), (y, p), (z, r)\}.$$

α' . Βρείτε τα σύνολα $h(\{x, y\})$, $h^{-1}(q)$, $h^{-1}(\{p, r\})$, $h(\{y, z\})$.

β'. Επιλέξτε κατάλληλο περιορισμό της h σε υποσύνολο V του B , ώστε να βρείτε αριστερό αντίστροφο της $h|_V$.

Άσκηση 6.6 Έστω A το σύνολο των συναρτήσεων από τους φυσικούς αριθμούς στους φυσικούς αριθμούς, $A = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$. Ποιες από τις παρακάτω σχέσεις ορίζουν μερική διάταξη στο A ;

α'. $f \leq_1 g$ αν και μόνο αν $f(n) \leq g(n)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

β'. $f \leq_2 g$ αν και μόνο αν $f(n) \leq g(n)$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

γ'. $f \leq_3 g$ αν και μόνο αν υπάρχει m , ώστε για κάθε $n \geq m$, $f(n) \leq g(n)$.

Άσκηση 6.7 Πρόβλημα για γερούς λύτες.

Εάν $A = \emptyset$ και $B \neq \emptyset$, δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς μια συνάρτηση από το A στο B , και καμία συνάρτηση από το B στο A . Υπάρχει συνάρτηση από το \emptyset στο \emptyset ;