ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2011-12
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

M1124 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εργαστήριο Προβλημάτων 9

Τρίτη, 29/11/2011

Άσκηση 9.1 Δείξτε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$:

α΄. $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1 + 2 + \ldots + n)^2$

β΄. $133|(11^{n+1} + 12^{2n-1})$

γ΄. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

Άσκηση 9.2 Ορίστε m^n, για $m, n \in \mathbb{N}_0$, αναδρομικά με

$$m^0 = 1 \text{ , } m^{n+1} = m^n m.$$

Θεωρώντας γνωστές τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, δείξτε, με κατάλληλα επαγωγικά επιχειρήματα, οτι

α΄. $m^{n+r} = m^n m^r$

β΄. $(mn)^r = m^r n^r$

Άσκηση 9.3 Ορίζουμε αναδρομικά το $n!$ με $0! = 1$ και $(n+1)! = n!\,(n+1)$.

α΄. Δείξτε με επαγωγή οτι $(n-r)!\,r!$ διαιρεί το $n!$ για όλα τα r με $0 \leq r \leq n$.

β΄. Ορίζουμε τον *διωνυμικό συντελεστή*

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}\,.$$

Δείξτε οτι

(i) $\binom{n}{0} = 1$

(ii) $\binom{n}{1} = n$

(iii) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

γ′. Δείξτε οτι

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}\,.$$

δ′. Δείξτε με επαγωγή οτι

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \cdots + \binom{n}{n}b^n\,.$$

Άσκηση 9.4 Αντιστρέφοντας τη διαδικασία του Ευκλείδειου Αλγόριθμου, μπορούμε να βρούμε ακέραιους αριθμούς a, $b \in \mathbb{Z}$, τέτοιους ώστε

$$\text{μκδ}\,(p,\,q) = ap + bq.$$

Χρησιμοποιήστε αυτή την παρατήρηση για να γράψετε το 17 στη μορφή $612a + 221b$, με a, $b \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 9.5 Δείξτε οτι εάν p, q, $r \in \mathbb{N}$, $p|r$, $q|r$ και $\text{μκδ}\,(p,\,q) = 1$, τότε $pq|r$.