ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ **Ιανουάριος 2012**
Τμήμα Μαθηματικών **Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης**

M1124 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Παρατηρήσεις

1. Διαβάστε προσεκτικά τα θέματα πριν αρχίσετε να απαντάτε. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι σαφείς, σύντομες και αιτιολογημένες σε επίπεδο ανάλογο με αυτό της διατύπωσης της ερώτησης.
2. Γράψτε σε διαφορετική σελίδα την απάντηση κάθε θέματος. Συνιστάται να γράφετε τις απαντήσεις μόνο στη δεξιά σελίδα, και να χρησιμοποιείτε την αριστερή για πρόχειρους υπολογισμούς (ή το αντίθετο αν είστε αριστερόχειρες).
3. Πρέπει να παραδώσετε όλες τις κόλλες που χρησιμοποιήσατε.
4. Η εξέταση διαρκεί 180 λεπτά. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ Η ΕΞΟΔΟΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΙΘΟΥΣΑ, παρά μόνο μετά από άδεια του διδάσκοντος (όχι του επιτηρητή). Απαγορεύεται το κάπνισμα μέσα στην αίθουσα εξέτασης. Τα πρώτα 30 λεπτά απαγορεύεται η αποχώρηση από την εξέταση.
5. Ο μέγιστος βαθμός είναι 80. Κάθε θέμα αντιστοιχεί σε 10 μονάδες, ενώ άλλες 10 μονάδες δίδονται για την πληρότητα των διατυπώσεων και τη σωστή χρήση των συμβολισμών και της μαθηματικής γλώσσας.

ΘΕΜΑ 1.

α′. V και W είναι υποσύνολα του χώρου U, και A^c συμβολίζει το συμπλήρωμα $U \setminus A$. Εάν γνωρίζετε οτι

$$[(W \cup V^c) \cap (W^c \cup V^c)]^c \setminus W = \varnothing$$

τί συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε για τη σχέση μεταξύ των V και W;

β′. A και B είναι σύνολα. Δείξτε οτι

$$\mathfrak{P}(A \cap B) = \mathfrak{P}(A) \cap \mathfrak{P}(B)\,.$$

Απαντήσεις

α′.

$$\begin{aligned}
[(W \cup V^c) \cap (W^c \cup V^c)]^c \setminus W &= [(W \cup V^c)^c \cup (W^c \cup V^c)^c] \setminus W \\
&= [(W^c \cap V) \cup (W \cap V)] \setminus W \\
&= [(W^c \cup W) \cap V] \setminus W \\
&= V \setminus W\,,
\end{aligned}$$

άρα $V \setminus W = \varnothing$, από το οποίο συμπεραίνουμε οτι $V \subseteq W$.

β′. Θεωρούμε $V \in \mathfrak{P}(A \cap B)$. Αυτό σημαίνει οτι $V \subseteq A \cap B$, και άρα $V \subseteq A$ και $V \subseteq B$. Συνεπώς $V \in \mathfrak{P}(A)$ και $V \in \mathfrak{P}(B)$. Άρα $V \in \mathfrak{P}(A) \cap \mathfrak{P}(B)$.

Αντίστροφα, εάν $V \in \mathfrak{P}(A) \cap \mathfrak{P}(B)$, τότε $V \subseteq A$ και $V \subseteq B$, άρα $V \subseteq A \cap B$ και συνεπώς $V \in \mathfrak{P}(A \cap B)$.

Συμπεραίνουμε οτι $\mathfrak{P}(A \cap B) = \mathfrak{P}(A) \cap \mathfrak{P}(B)$.

ΘΕΜΑ 2.

α′. Βρείτε ένα παράδειγμα, όπου A, B, C και D είναι διαστήματα στο $\mathbb{R}$, για να δείξετε οτι

$$(A \times C) \cup (B \times D) \neq (A \cup B) \times (C \cup D)\,.$$

β′. Δείξτε οτι εάν $\boldsymbol{\sigma}$ και $\boldsymbol{\rho}$ είναι συμμετρικές σχέσεις στο σύνολο A, τότε η σχέση $\boldsymbol{\sigma} \cup \boldsymbol{\rho}$ είναι συμμετρική.

Απαντήσεις

α′. Θεωρούμε τα διαστήματα $A = [1,\, 3]$, $B = [2,\, 4]$, $C = [1,\, 3]$ και $D = [2,\, 4]$ στο $\mathbb{R}$. (Τότε $A \times C$, $B \times D$ και $(A \cup B) \times (C \cup D)$ είναι ορθογώνια στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$.) Παρατηρούμε οτι το σημείο $(4,\, 1)$ ανήκει στο $(A \cup B) \times (C \cup D)$ αλλά δεν ανήκει στο $(A \times C) \cup (B \times D)$. Συμπεραίνουμε οτι

$$(A \times C) \cup (B \times D) \neq (A \cup B) \times (C \cup D)\,.$$

β′. Μία σχέση $\boldsymbol{\tau}$ στο A είναι συμμετρική εάν για κάθε ζεύγος $(a,\, b) \in \boldsymbol{\tau}$, ισχύει επίσης $(b,\, a) \in \boldsymbol{\tau}$. Θεωρούμε $(a,\, b) \in \boldsymbol{\sigma} \cup \boldsymbol{\rho}$. Αυτό σημαίνει οτι είτε $(a,\, b) \in \boldsymbol{\sigma}$ είτε $(a,\, b) \in \boldsymbol{\rho}$. Εάν $(a,\, b) \in \boldsymbol{\sigma}$, αφού η $\boldsymbol{\sigma}$ είναι συμμετρική, ισχύει $(b,\, a) \in \boldsymbol{\sigma}$. Εάν $(a,\, b) \in \boldsymbol{\rho}$, αφού η $\boldsymbol{\rho}$ είναι συμμετρική, ισχύει $(b,\, a) \in \boldsymbol{\rho}$. Σε κάθε περίπτωση $(a,\, b) \in \boldsymbol{\sigma} \cup \boldsymbol{\rho}$. Συμπεραίνουμε οτι η σχέση $\boldsymbol{\sigma} \cup \boldsymbol{\rho}$ είναι συμμετρική.

ΘΕΜΑ 3. Δίδεται το σύνολο $A = \{a,\, b,\, c,\, d\}$.

α′. Ορίστε μία ενεικονική (1–1) συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$.

β′. Ορίστε μία επεικονική (επί) συνάρτηση $g : \mathbb{N} \longrightarrow A$.

γ′. Βρείτε ένα αριστερό αντίστροφο της f, και ελέγξτε οτι πράγματι είναι αριστερό αντίστροφο.

δ′. Βρείτε ένα δεξιό αντίστροφο της g, και ελέγξτε οτι πράγματι είναι δεξιό αντίστροφο.

Απαντήσεις

α′. Μία συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$ ορίζεται όταν γνωρίζουμε την τιμή της f για κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού A. Για να είναι η συνάρτηση ενεικονική, πρέπει οι τιμές της f για διαφορετικά στοιχεία του A να μην είναι ίσες. Μπορούμε λοιπόν να θέσουμε $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$ και $f(d) = 4$. (Εναλλακτικά μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση ως ένα υποσύνολο του $A \times \mathbb{N}$, $f = \{(a,\, 1),\, (b,\, 2),\, (c,\, 3),\, (d,\, 4)\}$.)

β′. Για να ορίσουμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{N} \longrightarrow A$, πρέπει να ορίσουμε την τιμή της g για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για να είναι επεικονική, πρέπει κάθε στοιχείο του A να είναι τιμή της g για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε $g(1) = a$, $g(2) = b$, $g(3) = c$ και $g(n) = d$ για κάθε $n \geq 4$.

γ′. Για να είναι μία συνάρτηση $h : \mathbb{N} \longrightarrow A$ αριστερό αντίστροφο της f, πρέπει να ισχύει $h \circ f(x) = x$ για κάθε $x \in A$. Παρατηρούμε οτι αυτή η συνθήκη ικανοποιείται για τη συνάρτηση g. Πράγματι, $g \circ f(a) = g(f(a)) = g(1) = a$, και παρόμοια, $g \circ f(x) = x$ για κάθε $x \in A$. Συμπεραίνουμε οτι g είναι αριστερό αντίστροφο της f.

δ′. Για να είναι μία συνάρτηση $h : A \longrightarrow \mathbb{N}$ δεξιό αντίστροφο της g, πρέπει να ισχύει $g \circ h(x) = x$ για κάθε $x \in A$. Παρατηρούμε οτι αυτή η συνθήκη ικανοποιείται για τη συνάρτηση f αφού $g \circ f(x) = x$ για κάθε $x \in A$. Συμπεραίνουμε οτι f είναι αριστερό αντίστροφο της g.

ΘΕΜΑ 4. Γράψτε την άρνηση κάθε μίας από τις ακόλουθες προτάσεις, και περάστε το σύμβολο $\neg$ μέσα από τις παρενθέσεις.

α′. $\forall x \, : \, (P(x) \wedge Q(x))$

β′. $\exists x \, : \, (P(x) \Rightarrow Q(x))$

γ′. $\forall x \in \mathbb{R} \, \exists y \in \mathbb{R} \, : \, (x \geq y)$

δ′. $\forall x \in \mathbb{R} \, \forall y \in \mathbb{R} \, \exists z \in \mathbb{Q} \, : \, (x + y \geq z)$

Απαντήσεις

α′. Έχουμε $\neg[\forall x \, : \, (P(x) \wedge Q(x))] \equiv \exists x \, : \, \neg[P(x) \wedge Q(x)]$. Η άρνηση της πρότασης $P \wedge Q$ είναι ισοδύναμη με την πρόταση $\neg P \vee \neg Q$.
Άρα $\neg[\forall x \, : \, (P(x) \wedge Q(x))] \equiv \exists x \, : \, (\neg P(x) \vee \neg Q(x))$.

β′. Η πρόταση $P \Rightarrow Q$ είναι ισοδύναμη με την πρόταση $\neg P \vee Q$. Συνεπώς η άρνηση της πρότασης $P \Rightarrow Q$ είναι ισοδύναμη με την πρόταση $\neg[\neg P \vee Q]$, δηλαδή με την πρόταση $P \wedge \neg Q$.
Άρα $\neg[\exists x \, : \, (P(x) \Rightarrow Q(x))] \equiv \forall x \, : \, (P(x) \wedge \neg Q(x))$.

γ′. $\neg[\forall x \in \mathbb{R} \, \exists y \in \mathbb{R} \, : \, (x \geq y)] \equiv \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \, : \, (x < y)$.

δ′. $\neg[\forall x \in \mathbb{R} \, \forall y \in \mathbb{R} \, \exists z \in \mathbb{Q} \, : \, (x + y \geq z)] \equiv \exists x \in \mathbb{R} \, \exists y \in \mathbb{R} \, \forall z \in \mathbb{Q} \, : \, (x + y < z)$

ΘΕΜΑ 5.

α′. Δείξτε οτι κάθε φυσικός αριθμός μεγαλύτερος από το 11, γράφεται στη μορφή $n = 4m + 5\ell$, όπου m και ℓ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί.

β′. Δείξτε οτι το πηλίκο της διαίρεσης του $m + m'$ με το n είναι μεγαλύτερο από, ή ίσο με το άθροισμα των πηλίκων του m και του m' με το n. Πιο συγκεκριμένα, δείξτε οτι εάν m, m', $n \in \mathbb{N}$ και q, q', q'', r, r', $r'' \in \mathbb{N}_0$ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $m = qn + r$, $m' = q'n + r'$, $(m + m') = q''n + r''$ και $r < n$, $r' < n$, $r'' < n$, τότε $q + q' \leq q'' \leq q + q' + 1$.

Απαντήσεις

α′. Έστω $n > 11$ και $n = 4m + 5\ell$, για $m, \ell \in N_0$. Τότε $n + 1 = 4m + 5\ell + 1$. Εάν $m > 0$, τότε $n+1 = 4(m-1)+5(\ell+1)$. Εάν $m = 0$, και αφού $n > 11$, έχουμε $\ell \geq 3$. Τότε $n + 1 = 4 \cdot 4 + 5(\ell - 3)$. Αφού $12 = 4 \cdot 3$, επαγωγικά ισχύει το ζητούμενο για κάθε φυσικό αριθμό μεγαλύτερο από το 11.

β′. Προσθέτωντας τις δύο πρώτες σχέσεις έχουμε $m+m' = (q+q')n+r+r'$ με $0 \leq r+r' < 2n$. Επίσης $(m+m') = q''n+r''$ με $r'' < n$. Εάν $r+r' < n$, τότε από τη μοναδικότητα του αλγορίθμου διαίρεσης, $r'' = r + r'$, και $q'' = q + q'$. Εάν $n \leq r + r' < 2n$, τότε $r'' = r + r' - n$ και $q'' = q + q' + 1$. Σε κάθε περίπτωση, $q + q' \leq q'' \leq q + q' + 1$.

ΘΕΜΑ 6.

α′. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε μία δεκαμελή επιτροπή από τα 80 άτομα σε μία τάξη; Εάν στην τάξη υπάρχουν 60 κορίτσια και 20 αγόρια, με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε μία δεκαμελή επιτροπή στην οποία να υπάρχουν ακριβώς 3 αγόρια.

β′. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να διαταχθούν τα γράμματα της φράσης

ΛΟΥΦΑΚΑΙΠΑΡΑΛΛΑΓΗ ;

γ′. Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με ακριβώς 3 Α;
(Για παράδειγμα, ΑΑΑΛΟΥΦΚΙΠΡΑΛΛΑΓΗ,
αλλά όχι ΑΑΑΑΛΟΥΦΚΙΠΡΛΛΑΓΗ).

Απαντήσεις

α′. Για να επιλέξουμε μία δεκαμελή επιτροπή από τα 80 άτομα, θεωρούμε συνδυασμούς των 80 ατόμων ανά 10, χωρίς διάταξη και χωρίς επαναλήψεις. Άρα υπάρχουν

$$\binom{80}{10} = \frac{80!}{70!10!}$$

τέτοιοι συνδυασμοί.

Εάν στην τάξη υπάρχουν 60 κορίτσια και 20 αγόρια, και θέλουμε να επιλέξουμε μία δεκαμελή επιτροπή στην οποία να υπάρχουν ακριβώς 3 αγόρια, επιλέγουμε ανεξάρτητα 7 κορίτσια και 3 αγόρια. Υπάρχουν

$$\binom{60}{7} \cdot \binom{20}{3} = \frac{60!20!}{53!7!17!3!}$$

τρόποι να κάνουμε την επιλογή.

β′. Η φράση ΛΟΥΦΑΚΑΙΠΑΡΑΛΛΑΓΗ αποτελείται από 17 γράμματα, μεταξύ των οποίων 5 Α, 3 Λ, και 9 γράμματα που εμφανίζονται μία φορά. Έχουμε περίπτωση μεταθέσεων αντικειμένων που διακρίνονται σε ομάδες. Ο αριθμός των διαφορετικών διατάξεων είναι

$$M(5, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = \frac{17!}{5!3!}.$$

γ′. Για να βρούμε τον αριθμό των μεταθέσεων που αρχίζουν με ακριβώς 3 Α, αφαιρούμε τα 3 Α, και υπολογίζουμε τις διατάξεις των υπολοίπων 14 γραμμάτων οι οποίες δεν αρχίζουν με Α. Για το πρώτο γράμμα μετά τα 3 Α έχουμε 12 επιλογές (14 γράμματα, μείον τα 2 Α). Για τα υπόλοιπα 13 γράμματα, υπάρχουν 13! διατάξεις. Διαιρώντας με τον αριθμό των μεταθέσεων των ίδιων γραμμάτων, έχουμε

$$\frac{12 \cdot 13!}{2!3!} = \frac{6 \cdot 13!}{3!}\,.$$

Διαφορετικός τρόπος υπολογισμού: Υπολογίζουμε τις μεταθέσεις που αρχίζουν με τουλάχιστον 3 Α, και αφαιρούμε τον αριθμό των μεταθέσεων που αρχίζουν με τουλάχιστον 4 Α. Ο πρώτος είναι $14!/(2!3!)$, και ο δεύτερος $13!/3!$. Τελικά

$$\frac{14!}{2!3!} - \frac{13!}{3!} = \frac{13!}{3!}\left(\frac{14}{2} - 1\right) = \frac{6 \cdot 13!}{3!}\,.$$

ΘΕΜΑ 7.

α′. Εξηγήστε τι σημαίνει οτι ένα σύνολο είναι αριθμήσιμο. Δείξτε οτι το σύνολο των συναρτήσεων από το σύνολο $\{0,\,1\}$ στο σύνολο $\mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο.

β′. Εξηγήστε το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor για να αποδείξετε οτι το σύνολο των συναρτήσεων από το σύνολο $\mathbb{N}$ στο σύνολο $\{0,\,1\}$ δεν είναι αριθμήσιμο.

Απαντήσεις

α′. Ένα σύνολο A είναι αριθμήσιμο εάν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση από το σύνολο A σε ένα υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Ισοδύναμα, ένα σύνολο είναι αριθμήσιμο εάν είτε είναι πεπερασμένο είτε έχει τον ίδιο πληθικό αριθμό με το $\mathbb{N}$. (Ένα σύνολο A είναι πεπερασμένο εάν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση από το σύνολο A σε ένα σύνολο της μορφής $\mathbb{N}(k) = \{n \in \mathbb{N} \,:\, n \leq k\}$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}_0$.)

Έστω $\mathcal{T}$ το σύνολο των συναρτήσεων από το σύνολο $\{0,\,1\}$ στο σύνολο $\mathbb{N}$. Τα στοιχεία του $\mathcal{T}$ είναι συναρτήσεις $f : \{0,\,1\} \longrightarrow \mathbb{N}$. Μία τέτοια συνάρτηση προσδιορίζεται από τις τιμές της, $f(0)$, $f(1)$. Συνεπώς για κάθε συνάρτηση f έχουμε το διατεταγμένο ζεύγος φυσικών αριθμών $(f(0),\,f(1)) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Θα δείξουμε οτι η αντιστοιχία $\varphi : f \mapsto (f(0),\,f(1))$ είναι μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $\varphi : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ από το S στο $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Η φ είναι συνάρτηση, αφού για κάθε $f \in S$ ορίζεται μοναδικό ζεύγος $(f(0),\,f(1)) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Η φ είναι ενεικονική, αφού εάν $f,\,g \in \mathcal{T}$ και $(f(0),\,f(1)) = (g(0),\,g(1))$ τότε $f = g$. Η φ είναι επεικονική, αφού για κάθε $(m,\,n,) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ υπάρχει συνάρτηση $f : \{0,\,1\} \longrightarrow \mathbb{N}$, με $f(0) = m$ και $f(1) = n$, ούτως ώστε $\varphi(f) = (m,\,n)$.

β′. Έστω $\mathcal{S}$ το σύνολο των συναρτήσεων από το $\mathbb{N}$ στο σύνολο $\{0,\,1\}$, δηλαδή των ακολουθιών από 0 και 1. Θεωρούμε μία συνάρτηση $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{S}$,

$$\varphi(n) = (a_{n,1},\,a_{n,2},\,\ldots,\,a_{n,k},\,\ldots)\,.$$

Θα κατασκευάσουμε μία ακολουθία $b = (b_1,\,b_2,\,\ldots,\,b_k,\,\ldots)$ διαφορετική από την $\varphi(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $b_k = 1$ εάν $a_{k,k} = 0$ και $b_k = 0$ εάν $a_{k,k} = 1$. (Εάν γράψουμε τις ακολουθίες σε μορφή πίνακα, $a_{k,k}$ είναι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα, εξ ού και το όνομα του επιχειρήματος του Cantor.) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $\varphi(n)$ διαφέρει από τη b, αφού $a_{n,n} \neq b_n$. Συνεπώς η ακολουθία b δεν ανήκει στην εικόνα της φ. Αυτό το επιχείρημα ισχύει για καθε συνάρτηση από το $\mathbb{N}$ στο $\mathcal{S}$. Συμπεραίνουμε οτι δεν υπάρχει επεικόνιση από το $\mathbb{N}$ στο $\mathcal{S}$.