ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ **Ιανουάριος 2012**
Τμήμα Μαθηματικών **Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης**

M1124 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Παρατηρήσεις

1. Διαβάστε προσεκτικά τα θέματα πριν αρχίσετε να απαντάτε. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι σαφείς, σύντομες και αιτιολογημένες σε επίπεδο ανάλογο με αυτό της διατύπωσης της ερώτησης.

2. Γράψτε σε διαφορετική σελίδα την απάντηση κάθε θέματος. Συνιστάται να γράφετε τις απαντήσεις μόνο στη δεξιά σελίδα, και να χρησιμοποιείτε την αριστερή για πρόχειρους υπολογισμούς (ή το αντίθετο αν είστε αριστερόχειρες).

3. Πρέπει να παραδώσετε όλες τις κόλλες που χρησιμοποιήσατε.

4. Η εξέταση διαρκεί 180 λεπτά. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ Η ΕΞΟΔΟΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΙΘΟΥΣΑ, παρά μόνο μετά από άδεια του διδάσκοντος (όχι του επιτηρητή). Απαγορεύεται το κάπνισμα μέσα στην αίθουσα εξέτασης. Τα πρώτα 30 λεπτά απαγορεύεται η αποχώρηση από την εξέταση.

5. Ο μέγιστος βαθμός είναι 80. Κάθε θέμα αντιστοιχεί σε 10 μονάδες, ενώ άλλες 10 μονάδες δίδονται για την πληρότητα των διατυπώσεων και τη σωστή χρήση των συμβολισμών και της μαθηματικής γλώσσας.

ΘΕΜΑ 1.

α′. V και W είναι υποσύνολα του χώρου U, και A^c συμβολίζει το συμπλήρωμα $U \setminus A$. Εάν γνωρίζετε οτι

$$[(W \cup V^c) \cap (W^c \cup V^c)]^c \setminus W = \varnothing$$

τί συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε για τη σχέση μεταξύ των V και W;

β′. A και B είναι σύνολα. Δείξτε οτι

$$\mathfrak{P}(A \cap B) = \mathfrak{P}(A) \cap \mathfrak{P}(B)\,.$$

ΘΕΜΑ 2.

α′. Βρείτε ένα παράδειγμα, όπου A, B, C και D είναι διαστήματα στο $\mathbb{R}$, για να δείξετε οτι

$$(A \times C) \cup (B \times D) \neq (A \cup B) \times (C \cup D)\,.$$

β′. Δείξτε οτι εάν $\boldsymbol{\sigma}$ και $\boldsymbol{\rho}$ είναι συμμετρικές σχέσεις στο σύνολο A, τότε η σχέση $\boldsymbol{\sigma} \cup \boldsymbol{\rho}$ είναι συμμετρική.

ΘΕΜΑ 3. Δίδεται το σύνολο $A = \{a, b, c, d\}$.

α′. Ορίστε μία ενεικονική (1–1) συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$.

β′. Ορίστε μία επεικονική (επί) συνάρτηση $g : \mathbb{N} \longrightarrow A$.

γ′. Βρείτε ένα αριστερό αντίστροφο της f, και ελέγξτε οτι πράγματι είναι αριστερό αντίστροφο.

δ′. Βρείτε ένα δεξιό αντίστροφο της g, και ελέγξτε οτι πράγματι είναι δεξιό αντίστροφο.

ΘΕΜΑ 4. Γράψτε την άρνηση κάθε μίας από τις ακόλουθες προτάσεις, και περάστε το σύμβολο $\neg$ μέσα από τις παρενθέσεις.

α′. $\forall x\,:\,(P(x) \wedge Q(x))$

β′. $\exists x\,:\,(P(x) \Rightarrow Q(x))$

γ′. $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}\,:\,(x \geq y)$

δ′. $\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\, \exists z \in \mathbb{Q}\,:\,(x + y \geq z)$

ΘΕΜΑ 5.

α′. Δείξτε οτι κάθε φυσικός αριθμός μεγαλύτερος από το 11, γράφεται στη μορφή $n = 4m + 5\ell$, όπου m και ℓ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί.

β′. Δείξτε οτι το πηλίκο της διαίρεσης του $m + m'$ με το n είναι μεγαλύτερο από, ή ίσο με το άθροισμα των πηλίκων του m και του m' με το n. Πιο συγκεκριμένα, δείξτε οτι εάν $m, m', n \in \mathbb{N}$ και $q, q', q'', r, r', r'' \in \mathbb{N}_0$ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $m = qn + r$, $m' = q'n + r'$, $(m + m') = q''n + r''$ και $r < n$, $r' < n$, $r'' < n$, τότε $q + q' \leq q'' \leq q + q' + 1$.

ΘΕΜΑ 6.

α′. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε μία δεκαμελή επιτροπή από τα 80 άτομα σε μία τάξη; Εάν στην τάξη υπάρχουν 60 κορίτσια και 20 αγόρια, με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε μία δεκαμελή επιτροπή στην οποία να υπάρχουν ακριβώς 3 αγόρια.

β′. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να διαταχθούν τα γράμματα της φράσης

ΛΟΥΦΑΚΑΙΠΑΡΑΛΛΑΓΗ ;

γ′. Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με ακριβώς 3 Α;
(Για παράδειγμα, ΑΑΑΛΟΥΦΚΙΠΡΑΛΛΑΓΗ,
αλλά όχι ΑΑΑΑΛΟΥΦΚΙΠΡΛΛΑΓΗ).

ΘΕΜΑ 7.

α′. Εξηγήστε τι σημαίνει οτι ένα σύνολο είναι αριθμήσιμο. Δείξτε οτι το σύνολο των συναρτήσεων από το σύνολο $\{0, 1\}$ στο σύνολο $\mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο.

β′. Εξηγήστε το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor για να αποδείξετε οτι το σύνολο των συναρτήσεων από το σύνολο $\mathbb{N}$ στο σύνολο $\{0, 1\}$ δεν είναι αριθμήσιμο.