ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Υπόδειγμα Θεμάτων 2011-12
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

M1124 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Παρατηρήσεις

1. Διαβάστε προσεκτικά τα θέματα πριν αρχίσετε να απαντάτε. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι σαφείς, σύντομες και αιτιολογημένες σε επίπεδο ανάλογο με αυτό της διατύπωσης της ερώτησης.
2. Γράψτε σε διαφορετική σελίδα την απάντηση κάθε θέματος. Συνιστάται να γράφετε τις απαντήσεις μόνο στη δεξιά σελίδα, και να χρησιμοποιείτε την αριστερή για πρόχειρους υπολογισμούς (ή το αντίθετο αν είστε αριστερόχειρες).
3. Πρέπει να παραδώσετε όλες τις κόλλες που χρησιμοποιήσατε.
4. Η εξέταση διαρκεί 180 λεπτά. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ Η ΕΞΟΔΟΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΙΘΟΥΣΑ, παρά μόνο μετά από άδεια του διδάσκοντος (όχι του επιτηρητή). Απαγορεύεται το κάπνισμα μέσα στην αίθουσα εξέτασης. Τα πρώτα 30 λεπτά απαγορεύεται η αποχώρηση από την εξέταση.
5. Ο μέγιστος βαθμός είναι 80. Κάθε θέμα αντιστοιχεί σε 10 μονάδες, ενώ άλλες 10 μονάδες δίδονται για την πληρότητα των διατυπώσεων και τη σωστή χρήση των συμβολισμών και της μαθηματικής γλώσσας.

ΘΕΜΑ 1.

α′. Δίδονται τα σύνολα $A = \{\{a\}, b, c\}$ και $B = \{1, 2, \varnothing\}$. Εξετάστε εάν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. ($\mathfrak{P}(A)$ συμβολίζει το δυναμοσύνολο του A.)

(i) $\{a, b\} \subseteq A$

(ii) $\varnothing \in \mathfrak{P}(B)$

(iii) $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \mathfrak{P}(B)$

(iv) $\varnothing \in \mathfrak{P}(A)$

(v) $\varnothing \in A \cup B$

β′. Εάν A και B είναι υποσύνολα του χώρου U, δείξτε οτι $((A \cap B)^c \cup A) \setminus B = B^c$. ($A^c$ συμβολίζει το συμπλήρωμα $U \setminus A$.)

ΘΕΜΑ 2.

α′. Δείξτε οτι για οποιαδήποτε σύνολα A, B και C,

$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)\,.$$

β′. Μια σχέση ρ στο σύνολο A είναι ένα υποσύνολο $\rho \subseteq A \times A$. Πότε λέμε οτι η σχέση ρ είναι ανακλαστική; πότε συμμετρική; πότε μεταβατική;

γ′. Ορίστε στο σύνολο $A = \{a, b, c, d\}$ μια σχέση ισοδυναμίας ρ τέτοια ώστε η διαμέριση που αντιστοιχεί στη ρ να έχει δύο στοιχεία.

ΘΕΜΑ 3.

α′. Εάν f και g είναι συναρτήσεις από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{N}$ τέτοιες ώστε

$$f(n) = n + 2$$

$$g(n) = \begin{cases} 0, & \text{εάν } n \text{ είναι άρτιος} \\ 1, & \text{εάν } n \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

καθορίστε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

β′. Εάν $f : A \to B$ είναι συνάρτηση και $P \subseteq A$, $Q \subseteq B$, $R \subseteq B$, ποιά σύνολα συμβολίζουμε με $f(P)$ και $f^{-1}(Q)$;
Δείξτε οτι

$$f^{-1}(Q \cap R) = f^{-1}(Q) \cap f^{-1}(R)\,.$$

ΘΕΜΑ 4.

α′. Επαληθεύστε τις λογικές ισοδυναμίες

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q) \quad \text{και} \quad (P \wedge Q) \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)\,.$$

β′. Βρείτε μία πρόταση λογικά ισοδύναμη με την $R \Leftrightarrow Q$ χρησιμοποιώντας μόνο τα λογικά σύμβολα $\neg$ και $\vee$.

γ′. Εξετάστε εάν ισχύει η πρόταση $\forall x \in \mathbb{Z}\, \exists y \in \mathbb{N} : x + y = 0$ και στη συνέχεια γράψτε την άρνηση αυτής της πρότασης.

ΘΕΜΑ 5.

α′. Ορίζουμε m^n, για $m, n \in \mathbb{N}_0$, αναδρομικά με

$$m^0 = 1\,, \quad m^{n+1} = m^n m\,.$$

Θεωρώντας γνωστές τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, δείξτε, με κατάλληλα επαγωγικά επιχειρήματα, οτι

$$m^{n+r} = m^n m^r\,.$$

β′. Αποδείξτε οτι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2\,.$$

ΘΕΜΑ 6.

α'. Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί μία δεκαμελής επιτροπή από τα 40 αγόρια και 60 κορίτσια σε μία τάξη, εάν πρέπει να είναι ίσος ο αριθμός των αγοριών και κοριτσιών στην επιτροπή;

β'. Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί μία δεκαμελής επιτροπή από τα 40 αγόρια και 60 κορίτσια σε μία τάξη, εάν στην επιτροπή πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 4 αγόρια και τουλάχιστον 4 κορίτσια;

ΘΕΜΑ 7.

α'. Με βάση τις ιδιότητες των αριθμησίμων συνόλων εξηγήστε γιατί τα σύνολα $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}, \sqrt{5}\}$ είναι αριθμήσιμα.

β'. Με χρήση του διαγωνίου επιχειρήματος του Cantor δείξτε γιατί το σύνολο των συναρτήσεων από το σύνολο $\mathbb{N}$ στο σύνολο $\{0, 1\}$ δεν είναι αριθμήσιμο.