

M1124 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Τεστ 1, Τρίτη, 1/11/2011. Α

Όνοματεπώνυμο:

A.M:

Άσκηση 1.1 Θεωρήστε τα σύνολα

$$A = \{b, c\}, \quad B = \{b, \{c\}, d\}, \quad C = \{\{a\}, b, c, \emptyset\}$$

Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς και ποιές ψευδείς; Εξηγήστε σύντομα την απάντησή σας.

α'. $c \in A$

β'. $c \in B$

γ'. $A \subseteq B$

δ'. $A \setminus C \in C$

ε'. $B \cap \mathfrak{P}(A) = \{\{c\}\}$

ς'. $A \cap B \subseteq C$

Απαντήσεις

1. $c \in A$ Αληθής. Το c είναι στοιχείο του συνόλου A .
2. $c \in B$ Ψευδής. Το c δεν είναι στοιχείο του συνόλου B . Στοιχείο του συνόλου B είναι το μονοσύνολο $\{c\}$.
3. $A \subseteq B$ Ψευδής. Το c είναι στοιχείο του συνόλου A αλλά δεν είναι στοιχείο του συνόλου B .
4. $A \setminus C \in C$ Αληθής. $A \setminus C$ είναι το κενό σύνολο, το οποίο είναι ένα από τα στοιχεία του συνόλου C .
5. $B \cap \mathfrak{P}(A) = \{\{c\}\}$ Αληθής. $\mathfrak{P}(A) = \{\{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \emptyset\}$, και η τομή του με το B είναι το σύνολο $\{\{c\}\}$.
6. $A \cap B \subseteq C$ Αληθής. $A \cap B = \{b\}$, το οποίο είναι υποσύνολο του C .

Άσκηση 1.2 Δίδονται υποσύνολα X, Y και Z του χώρου U . Δείξτε ότι

$$X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z).$$

Απάντηση

$$\begin{aligned} X \setminus (Y \cup Z) &= X \cap (Y \cup Z)^c \\ &= X \cap (Y^c \cap Z^c) \\ &= (X \cap Y^c) \cap (X \cap Z^c) \\ &= (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) \end{aligned}$$

Άσκηση 1.3 Θεωρούμε το σύνολο $A = \{a, b, c\}$.

- α'. Δώστε ένα παράδειγμα σχέσης στο σύνολο A που να μην έχει την ανακλαστική ιδιότητα.
- β'. Δώστε ένα παράδειγμα σχέσης στο σύνολο A που να έχει την ανακλαστική ιδιότητα.
- γ'. Πόσες διαφορετικές σχέσεις στο A έχουν την ανακλαστική ιδιότητα;

Απαντήσεις

Μία σχέση στο A είναι ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $A \times A$. Για να έχει την ανακλαστική ιδιότητα, πρέπει να περιέχει όλα τα ζεύγη της μορφής (x, x) για κάθε $x \in A$.

1. Οποιοδήποτε υποσύνολο του $A \times A$ δεν περιέχει όλα τα στοιχεία της 'διαγωνίου', για παράδειγμα το κενό υποσύνολο \emptyset .
2. Οποιοδήποτε υποσύνολο του $A \times A$ που περιέχει όλα τα στοιχεία της 'διαγωνίου', για παράδειγμα το υποσύνολο $\{(a, a), (b, b), (c, c)\}$.
3. Αφού τα στοιχεία $(a, a), (b, b), (c, c)$ πρέπει υποχρεωτικά να περιέχονται σε μία ανακλαστική σχέση, ο αριθμός τους είναι όσοι οι τρόποι να επιλέξουμε κάποια από τα υπόλοιπα 6 στοιχεία του $A \times A$, δηλαδή $2^6 = 64$.

Άσκηση 1.4 Θεωρούμε το σύνολο $X = \{p, q, r, s\}$. Βρείτε τη μικρότερη σχέση ισοδυναμίας σ στο X για την οποία ισχύουν $p \sigma q$ και $q \sigma s$.

Απάντηση

Η σχέση σ είναι ένα υποσύνολο του $X \times X$ στο οποίο ανήκουν τα ζεύγη (p, q) και (q, s) . Για να είναι η σ σχέση ισοδυναμίας στο X πρέπει να είναι ανακλαστική, δηλαδή για κάθε στοιχείο $x \in X$ να περιέχει το ζεύγος (x, x) . Άρα τα ζεύγη $(p, p), (q, q), (r, r)$ και (s, s) πρέπει να ανήκουν στη σ . Πρέπει επίσης να είναι συμμετρική, δηλαδή εάν το ζεύγος (x, y) ανήκει στη σ , το (y, x) πρέπει επίσης να ανήκει στη σ . Συνεπώς τα ζεύγη (q, p) και (s, q) ανήκουν στη σ . Τέλος, η σ πρέπει να είναι μεταβατική, δηλαδή εάν (x, y) και (y, z) ανήκουν στη σ , το ζεύγος (x, z) πρέπει επίσης να ανήκει στη σ . Συμπεραίνουμε ότι τα ζεύγη (p, s) και (s, p) πρέπει να ανήκουν στη σ .

Ελέγχουμε ότι το σύνολο

$$\sigma = \{(p, p), (q, q), (r, r), (s, s), (p, q), (q, s), (p, s), (q, p), (s, q), (s, p)\}$$

είναι πράγματι σχέση ισοδυναμίας στο X .