ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ **Χειμερινό Εξάμηνο 2011-12**
Τμήμα Μαθηματικών **Διδάσκων: Χ. Κουρουνιώτης**

M1124 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Τεστ 2, Τρίτη, 6/12/2011. B

Ονοματεπώνυμο: .... **A.M:** ....

Άσκηση 2.1 Θεωρούμε τις συναρτήσεις από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ και $g(x) = x - 1$. Βρείτε τις συναρτήσεις $s = g \circ f \circ g^{-1}$ και $t = f \circ g \circ f$, και σχεδιάστε ένα πρόχειρο σκίτσο του γραφήματος (στο οποίο να προσδιορίζετε τα σημεία τομής με τους άξονες).

Απάντηση:

$$\begin{aligned} s(x) &= g \circ f \circ g^{-1}(x) \\ &= g \circ f(x+1) \\ &= g((x+1)^2) \\ &= (x+1)^2 - 1\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t(x) &= f \circ g \circ f(x) \\ &= f \circ g(x^2) \\ &= f(x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)^2\,. \end{aligned}$$

Άσκηση 2.2 Βρείτε ποιές από τις ακόλουθες προτάσεις είναι λογικά ισοδύναμες.

$$(P \wedge Q) \Rightarrow R \quad , \qquad P \Rightarrow (Q \to R) \quad , \qquad (P \Rightarrow Q) \Rightarrow R\,.$$

Απάντηση: Κατασκευάζουμε τον πίνακα αληθείας των τριών προτάσεων:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow Q$	$(P \wedge Q) \Rightarrow R$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ

Συγκρίνοντας τις τρεις τελευταίες στήλες, βλέπουμε οτι οι προτάσεις $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ και $P \Rightarrow (Q \to R)$ είναι λογικά ισοδύναμες, ενώ η πρόταση $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ δεν είναι ισοδύναμη με τις άλλες δύο.

Άσκηση 2.3 Δίδεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 1)^2 - 1$.

α΄. Βρείτε τα σύνολα $f(\mathbb{R})$, $f([0, 2])$ και $f^{-1}([0, 8])$.

β΄. Εάν $A = [1, +\infty)$, βρείτε ένα αριστερό αντίστροφο της συνάρτησης $f|_A$. Είναι αυτό μοναδικό;

Απάντηση: α΄.

$$f(\mathbb{R}) = [-1, \infty)$$

$$\begin{aligned} f([0, 2]) &= f([0, 1]) \cup f([1, 2]) \\ &= [-1, 0] \cup [-1, 8] \\ &= [-1, 8] \end{aligned}$$

Οι ρίζες της εξίσωσης $(x^2 - 1)^2 - 1 = 0$ είναι $-\sqrt{2}$, 0 και $\sqrt{2}$, ενώ οι ρίζες της εξίσωσης $(x^2 - 1)^2 - 1 = 8$ είναι -2 και 2. Συνεπώς

$$f^{-1}([0, 8]) = [-2, -\sqrt{2}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{2}, 2]\,.$$

β΄. Η συνάρτηση $f|_A : A \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι ενεικονική, και $f(A) = [-1, \infty)$. Άρα υπάρχει αριστερό αντίστροφο $g : \mathbb{R} \longrightarrow A$. Για $y \in [-1, \infty)$ ορίζουμε $g(y) = x$ από τη σχέση $f(x) = y$, δηλαδή $(x^2 - 1)^2 - 1 = y$ και συνεπώς $g(y) = \sqrt{\sqrt{y+1} + 1}$. Για $y \in \mathbb{R} \setminus A$ θέτουμε $g(y) = 1$.

Η g δεν είναι μοναδική, αφού μπορούμε να ορίσουμε αυθαίρετα το $g(y)$ για $y \in \mathbb{R} \setminus A$.

Άσκηση 2.4 (Η ερώτηση του Α.) Για ποιά $n \in \mathbb{N}$ ισχύει οτι $(2n - 3)(n - 1) \leq 2^n$; Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας **με επαγωγή**.

Απάντηση: Υποθέτουμε οτι ισχύει $(2n - 3)(n - 1) \leq 2^n$, και θέλουμε να δείξουμε οτι ισχύει $(2(n + 1) - 3)((n + 1) - 1) \leq 2^{n+1}$.

$$\begin{aligned} (2(n+1) - 3)((n+1) - 1) &= (2n - 1)n \\ &= (2n - 3)(n - 1) + 4n - 3 \\ &\leq 2^n + 4n - 3\,. \end{aligned}$$

Άρα το επαγωγικό βήμα ισχύει, αρκεί να ισχύει οτι $4n - 3 \leq 2^n$. Αυτό ισχύει για $n \geq 4$ (απλή απόδειξη με επαγωγή). Οπότε, αρκεί να ελέγξουμε τις περιπτώσεις $n = 1, 2, 3, 4$, για τις οποίες η ανισότητα ισχύει. Άρα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.