ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ **Χειμερινό Εξάμηνο 2011-12**
Τμήμα Μαθηματικών **Διδάσκων: Χ. Κουρουνιώτης**

Μ1124 ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Τεστ 3, Τρίτη, 10/01/2012. B

Ονοματεπώνυμο: .... **Α.Μ:** ....

Άσκηση 3.1 Θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τα 26 γράμματα του λατινικού αλφαβήτου, και τα εννέα ψηφία $1, 2, \ldots, 9$ για να κατασκευάσουμε κωδικούς με 8 χαρακτήρες.

α΄. Πόσοι τέτοιοι κωδικοί υπάρχουν εάν δεν θέσουμε κανένα περιορισμό στον αριθμό και τη θέση των γραμμάτων που χρησιμοποιούμε;

β΄. Πόσοι κωδικοί υπάρχουν που αποτελούνται από 2 γράμματα στην αρχή, κατόπιν 4 ψηφία και κατόπιν 2 γράμματα;

γ΄. Πόσοι κωδικοί υπάρχουν που αποτελούνται από 3 ή 4 γράμματα στην αρχή και κατόπιν 5 ή 4 ψηφία;

Δεν χρειάζεται να εκτελέσετε τις πράξεις, ούτε να απλοποιήσετε τα αποτελέσματα. Χρειάζεται όμως να εξηγήσετε πως τα βρήκατε.

Απάντηση:

α΄. Έχουμε συνολικά $26 + 9 = 35$ χαρακτήρες, και επιλέγουμε 8 χαρακτήρες, με διάταξη (αφού ο κωδικός ΑΒ1234ΕΚ είναι διαφορετικός από τον ΒΑ1234ΕΚ) και επανάληψη (αφού μπορεί να επαναλαμβάνεται ο ίδιος χαρακτήρας). Συνεπώς υπάρχουν 35^8 διαφορετικοί κωδικοί.

β΄. Έχουμε 26^2 τρόπους (διάταξη με επανάληψη) να επιλέξουμε τα δύο πρώτα γράμματα, 9^4 τρόπους να επιλέξουμε τα τέσσερα ψηφία και 26^2 τρόπους να επιλέξουμε τα δύο τελευταία γράμματα. Από αρχή γινομένου, συνολικά έχουμε $26^2 9^4 26^2 = 26^4 9^4$ κωδικούς αυτής της μορφής.

γ΄. Έχουμε $26^3 9^5$ κωδικούς με 3 γράμματα και κατόπιν 5 ψηφία, και $26^4 9^4$ κωδικούς με 4 γράμματα και κατόπιν 4 ψηφία. Από αρχή αθροίσματος, συνολικά έχουμε $26^3 9^5 + 26^4 9^4$ κωδικούς αυτής της μορφής.

Άσκηση 3.2

α΄. Εξηγήστε τι σημαίνει οτι δύο σύνολα έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό.

β΄. Δείξτε οτι το σύνολο S των συναρτήσεων από το σύνολο $\{a, b, c\}$ στο σύνολο $\mathbb{N}$ έχει τον ίδιο πληθικό αριθμό με το το σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

γ΄. Εξηγήστε τι σημαίνει οτι ένα σύνολο είναι αριθμήσιμο.

δ΄. Είναι το σύνολο S αριθμήσιμο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Απάντηση:

α΄. Δύο σύνολα A και B έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό εάν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$. Τότε γράφουμε $|A| = |B|$.

β΄. Θέλουμε να βρούμε μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση από το σύνολο S στο σύνολο $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Σε κάθε στοιχείο του S πρέπει να αντιστοιχήσουμε ένα στοιχείο του $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Τα στοιχεία του S είναι συναρτήσεις $f : \{a, b, c\} \longrightarrow \mathbb{N}$. Μία τέτοια συνάρτηση προσδιορίζεται από τις τιμές της, $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$. Συνεπώς για κάθε συνάρτηση f έχουμε τη διατεταγμένη τριάδα φυσικών αριθμών $(f(a), f(b), f(c)) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Θα δείξουμε οτι η αντιστοιχία $\phi : f \mapsto (f(a), f(b), f(c))$ είναι μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $\phi : S \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ από το S στο $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Η ϕ είναι συνάρτηση, αφού για κάθε $f \in S$ ορίζεται μοναδική τριάδα $(f(a), f(b), f(c)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Η ϕ είναι ενεικονική, αφού εάν $f, g \in S$ και $(f(a), f(b), f(c)) = (g(a), g(b), g(c))$ τότε $f = g$. Η ϕ είναι επεικονική, αφού για κάθε $(m, n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ υπάρχει συνάρτηση $f : \{a, b, c\} \longrightarrow \mathbb{N}$, με $f(a) = m$, $f(b) = n$ και $f(c) = k$, ούτως ώστε $\phi(f) = (m, n, k)$.

γ΄. Ένα σύνολο είναι αριθμήσιμο εάν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση από το σύνολο σε ένα υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Ισοδύναμα, ένα σύνολο είναι αριθμήσιμο εάν είτε είναι πεπερασμένο είτε έχει τον ίδιο πληθικό αριθμό με το $\mathbb{N}$. (Ένα σύνολο είναι πεπερασμένο εάν έχει τον ίδιο πληθικό αριθμό με ένα σύνολο της μορφής $\mathbb{N}(k) = \{n \in \mathbb{N} : n \leq k\}$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}_0$.)

δ΄. Από το (β΄), $|S| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}|$. Αλλά γνωρίζουμε οτι το καρτεσιανό γινόμενο δύο αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο. Συνεπώς $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ και $|(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. Άρα $|S| = |\mathbb{N}|$.