ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2014-15
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ201 ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 1

Τετάρτη, 25/2/2015

Άσκηση 1.1 Να γραφούν τα παρακάτω αναπτύγματα ως προς τις ανιούσες δυνάμεις του x (δηλ. αρχίζοντας απο το σταθερό όρο και καταλήγοντας με τον όρο μέγιστου βαθμού)

α′) $(x+a)^3$ β′) $(x+a)(x+b)(x+c)$
γ′) $(x+a)^4$ δ′) $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$

Άσκηση 1.2 Να αποδειχθούν, με όσο γίνεται πιο οικονομικό τρόπο, οι ταυτότητες

α′) $(a+b)^3(a-b)-(a^4-b^4)=2ab(a^2-b^2)$

β′) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$

Απάντηση - Υπόδειξη.
α′) Βγάλετε κοινό παράγοντα $(a-b)$ και απλοποιήστε την αριστερή πλευρά.

Άσκηση 1.3 Αν $a+b+c=0$, να αποδείξετε ότι αν οι παρονομαστές είναι μη μηδενικοί, τότε

α′) $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2=-9abc$

β′) $$\frac{1}{a^2+b^2-c^2}+\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}=0$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
α′) Χρησιμοποιήστε την $a+b+c=0$ για να δείξετε οτι $a^3+b^3+c^3=3abc$. Στη συνέχεια αναπτύξτε την αριστερή πλευρά και χρησιμοποιήστε ξανά την $a+b+c=0$ για να καταλήξετε στο ζητούμενο.

Άσκηση 1.4 Εάν $a+b+c=2\tau$ να αποδείξετε οτι

$$(\tau-a)^2+(\tau-b)^2+(\tau-c)^2+\tau^2=a^2+b^2+c^2\,.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Αντικαταστείστε $\tau - a = \frac{1}{2}(b + c - a)$ κλπ.

Άσκηση 1.5 Αν x, y μη μηδενικοί αριθμοί και $x + y = A$, $xy = B$, να βρείτε τις τιμές των ακόλουθων παραστάσεων συναρτήσει των A και B

α′) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$
β′) $x^4 + y^4 + x^2y^2$
γ′) $\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$
δ′) $x^5 + y^5$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Για το (α′): Παρατηρούμε οτι $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2+y^2}{xy}$, και $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$. Καταλήγουμε στο $\frac{A^2-2B}{B}$. Για το (β′): Παρατηρούμε οτι $x^4 + y^4 + x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2$.
Καταλήγουμε στο $(A^2 - 2B)^2 - B^2$.