

MEM201 ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 10

Δευτέρα 18/5/2015

Άσκηση 10.1 Εξηγήστε γιατί οι ακόλουθες εξισώσεις δεν έχουν καμία λύση.

$$\alpha') \quad \sin \vartheta + \cos \vartheta = 2 \qquad \beta') \quad \sin \vartheta \cos \vartheta = 1.$$

Άσκηση 10.2 Αποδείξτε τις ακόλουθες ταυτότητες.

α'.

$$\tan \left(\frac{\pi}{4} - \vartheta \right) = \frac{\cos \vartheta - \sin \vartheta}{\cos \vartheta + \sin \vartheta},$$

β'.

$$\frac{\tan^2 2\vartheta - \tan^2 \vartheta}{1 - \tan^2 2\vartheta \tan^2 \vartheta} = \tan 3\vartheta \tan \vartheta,$$

γ'.

$$\frac{\sin 2\vartheta}{1 + \cos 2\vartheta} \cdot \frac{\cos \vartheta}{1 + \cos \vartheta} = \tan \frac{\vartheta}{2},$$

δ'.

$$\tan \vartheta + \tan \left(\vartheta + \frac{\pi}{3} \right) + \tan \left(\vartheta + \frac{2\pi}{3} \right) = 3 \tan 3\vartheta,$$

ε'.

$$\sin(\vartheta + \varphi) \cos \varphi - \sin(\vartheta + \omega) \cos \omega = \sin(\varphi - \omega) \cos(\vartheta + \varphi + \omega),$$

ϛ'.

$$3 \arctan 2 = \pi + \arctan \frac{2}{11},$$

ζ'.

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

α'. Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $\tan(\vartheta + \varphi) = \frac{\tan \vartheta + \tan \varphi}{1 - \tan \vartheta \tan \varphi}$.

β'. Παραγοντοποιήστε τις διαφορές τετραγώνων στον αριθμητή και τον παρονομαστή.

γ'. Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $1 + \cos \vartheta = 2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}$.

ε'. Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $\tan 3\vartheta = \frac{3 \tan \vartheta - \tan^3 \vartheta}{1 - 3 \tan^2 \vartheta}$.

Άσκηση 10.3 Οι συναρτήσεις υπερβολικό συνημίτονο και υπερβολικό ημίτονο ορίζονται από τις σχέσεις

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Αποδείξτε τις ακόλουθες ταυτότητες

α'.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

β'.

$$\cosh(-x) = \cosh x, \quad \sinh(-x) = -\sinh x,$$

γ'.

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

δ'.

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$