ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2014-15
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ201 ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 3

Τετάρτη, 11/3/2015

Άσκηση 3.1 Να επιλυθούν και όπου απαιτείται να διερευνηθούν οι παρακάτω εξισώσεις:
Υπόδειξη: Εξετάστε προσεκτικά τις εξισώσεις, να δείτε εάν μπορείτε να βρείτε λύσεις χωρίς να αναπτύξετε τις εκφράσεις.

α′) $$\frac{a-x}{1-ax} = \frac{1-bx}{b-x}$$

β′) $$(x+a-2b)^2 + (x-2a+b)^2 = 9(a+b)^2$$

γ′) $$(\lambda-1)(\lambda-2)x = (\lambda-1)^2(\lambda+3)$$

δ′) $$(a-x)^3 + (x-b)^3 = (a-b)^3$$

ε′) $$(x-a+2b)^3 - (x-2a+b)^3 = (a+b)^3$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
β′) Παρατηρούμε οτι η τιμή του x που μηδενίζει έναν από τους όρους στα αριστερά, κάνει τον άλλο όρο ίσο με τη δεξιά πλευρά. Άρα αυτές είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης. Παρόμοια για το (δ′) και το (ε′).

Άσκηση 3.2 Εάν a και b είναι ομόσημοι και μη μηδενικοί, δείξτε οτι $a < b$ εάν και μόνον εάν $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
Εάν a και b είναι ετερόσημοι, δείξτε οτι $a < b$ εάν και μόνον εάν $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες "εάν $x > 0$ τότε $a \geq b \Rightarrow ax \geq bx$" και "εάν $x < 0$ τότε $a \geq b \Rightarrow ax \leq bx$".

Απάντηση - Υπόδειξη.
Εάν a και b είναι ομόσημοι, εξετάζουμε τις περιπτώσεις $0 < a < b$ και $a < b < 0$.
Εάν $a < b < 0$, θέλουμε να δείξουμε οτι $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Υποθέτουμε οτι δεν ισχύει αυτό. Τότε ισχύει $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$. Πολλαπλασιάζοντας με $b < 0$, έχουμε $b\frac{1}{a} \geq b\frac{1}{b} = 1$.
Αφού $a < b$, πολλαπλασιάζοντας με $\frac{1}{a} < 0$, έχουμε $b\frac{1}{a} < a\frac{1}{a} = 1$.
Συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις, έχουμε $1 > b\frac{1}{a} \geq 1$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα δεν ισχύει η υπόθεση, και $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Αποδείξτε με παρόμοιο τρόπο οτι εάν $0 < a < b$ τότε $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
Αποδείξτε και την περίπτωση όπου a και b είναι ετερόσημοι. Εξηγήστε γιατί ισχύουν και οι αντίστροφες συνεπαγωγές: εάν $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ τότε $a < b$.

Άσκηση 3.3 Εάν $a < b < c$ δείξτε οτι $(a-b)(b-c)(c-a) > 0$, και $ac + b^2 < ab + bc$.

Άσκηση 3.4 Δείξτε οτι εάν a και b είναι θετικοί αριθμοί, τότε

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4\,.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Έχουμε $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = 2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$. Αλλά έχουμε δείξει οτι εάν $x > 0$, τότε $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Άσκηση 3.5 Δείξτε οτι $a^2+b^2 = 2(bc+cd-c^2-d^2)$ εάν και μόνον εάν $a = b = c = d = 0$.

Άσκηση 3.6 Δείξτε οτι εάν $a > 1$ και $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\frac{1+a^2+a^4+\cdots+a^{2n}}{a+a^3+a^5+\cdots+a^{2n-1}} > \frac{n+1}{na}\,.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση με το θετικό a, και γίνεται

$$\frac{a+a^3+a^5+\cdots+a^{2n-1}+a^{2n+1}}{a+a^3+a^5+\cdots+a^{2n-1}} > 1+\frac{1}{n}\,.$$

Τώρα αρκεί να δείξετε οτι

$$\frac{a^{2n+1}}{a+a^3+a^5+\cdots+a^{2n-1}} > +\frac{1}{n}\,,$$

δηλαδή οτι

$$na^{2n+1} > a+a^3+a^5+\cdots+a^{2n-1}\,.$$