

MEM201 ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 3

Τετάρτη, 11/3/2015

Άσκηση 3.1 Να επιλυθούν και όπου απαιτείται να διερευνηθούν οι παρακάτω εξισώσεις:
Υπόδειξη: Εξετάστε προσεκτικά τις εξισώσεις, να δείτε εάν μπορείτε να βρείτε λύσεις χωρίς να αναπτύξετε τις εκφράσεις.

$$\begin{aligned}\alpha') \quad & \frac{a-x}{1-ax} = \frac{1-bx}{b-x} \\ \beta') \quad & (x+a-2b)^2 + (x-2a+b)^2 = 9(a+b)^2 \\ \gamma') \quad & (\lambda-1)(\lambda-2)x = (\lambda-1)^2(\lambda+3) \\ \delta') \quad & (a-x)^3 + (x-b)^3 = (a-b)^3 \\ \epsilon') \quad & (x-a+2b)^3 - (x-2a+b)^3 = (a+b)^3\end{aligned}$$

Άσκηση 3.2 Εάν a και b είναι ομόσημοι και μη μηδενικοί, δείξτε ότι $a < b$ εάν και μόνον εάν $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Εάν a και b είναι ετερόσημοι, δείξτε ότι $a < b$ εάν και μόνον εάν $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες “εάν $x > 0$ τότε $a \geq b \Rightarrow ax \geq bx$ ” και “εάν $x < 0$ τότε $a \geq b \Rightarrow ax \leq bx$ ”.

Άσκηση 3.3 Εάν $a < b < c$ δείξτε ότι $(a-b)(b-c)(c-a) > 0$, και $ac + b^2 < ab + bc$.

Άσκηση 3.4 Δείξτε ότι εάν a και b είναι θετικοί αριθμοί, τότε

$$(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4.$$

Άσκηση 3.5 Δείξτε ότι $a^2 + b^2 = 2(bc + cd - c^2 - d^2)$ εάν και μόνον εάν $a = b = c = d = 0$.

Άσκηση 3.6 Δείξτε ότι εάν $a > 1$ και $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\frac{1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{2n}}{a + a^3 + a^5 + \dots + a^{2n-1}} > \frac{n+1}{na}.$$