ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2014-15
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ201 ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 4

Τετάρτη, 18/3/2015

Άσκηση 4.1 Ποιές από τις παρακάτω ισότητες είναι αληθείς για κάθε $x \neq 0$;

$$\text{α΄)} \qquad \left| x + \frac{1}{x} \right| = |x| + \frac{1}{|x|}\,,$$

$$\text{β΄)} \qquad \left| x - \frac{1}{x} \right| = |x| - \frac{1}{|x|}\,.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Για το (α΄) ελέγξατε για $x > 0$ και για $x < 0$.
Για το (β΄), αρκεί να βρείτε ένα αντιπαράδειγμα, στο οποίο οι δύο εκφράσεις έχουν διαφορετική τιμή.

Άσκηση 4.2 Να αποδείξετε την ακόλουθη ταυτότητα, γνωστή ως "κανόνας του παραλληλογράμμου",

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2\,.$$

Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί ονομάζεται έτσι;

Άσκηση 4.3 Δείξτε οτι εάν $0 \leq x \leq y$ τότε $\frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y}$.
Χρησιμοποιήστε το προηγούμενο για να δείξετε οτι για a, $b \in \mathbb{R}$,

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a| + |b|}{1 + |a| + |b|} \leq \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}\,.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Παρατηρήστε οτι η πρώτη σχέση είναι ισοδύναμη με $x + xy \leq y + xy$.

Άσκηση 4.4 Να λύσετε τις ακόλουθες εξισώσεις.

$$\text{α΄)} \qquad |x + 1| - 2x = |x - 10| - 9\,,$$

$$\text{β΄)} \qquad |x + 1| + |x - 1| + 3|x - 4| = 8\,,$$

$$\text{γ΄)} \qquad x^2 - 3|x| + 2 = 0\,,$$

$$\text{δ΄)} \qquad x^2 - |x| - x - 15 = 0\,.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Πρέπει να εξετάσετε τις διαφορετικές εξισώσεις που προκύπτουν όταν αφαιρέσετε τις απολύτους τιμές, και να βρείτε τις λύσεις για κάθε μία. Κατόπιν να ελέγξετε εάν οι λύσεις ικανοποιούν τις συνθήκες για κάθε εξίσωση. Για παράδειγμα, για την (α′),

1. για $x < -1$, η εξίσωση είναι $-x-1-2x = -x+10-9$, της οποίας η μοναδική λύση δεν είναι αποδεκτή.
2. για $-1 \leq x < 10$, η εξίσωση είναι $x+1-2x = -x+10-9$.
3. για $x \geq 10$, η εξίσωση γίνεται $x+1-2x = x-10-9$.

Άσκηση 4.5 Να λύσετε τις ακόλουθες ανισώσεις.

α′) Πού συναληθεύουν οι $|x| - 3x > 5$ και $|x+8| - 1 > \dfrac{x+1}{2}$,

β′) $|x-3| + |x+2| + |x| > 6\,,$

γ′) $|x-3| + |x+2| + |x| > 0\,,$

δ′) $|x-3| + |x+2| + |x| < 0\,.$

Άσκηση 4.6 Δείξτε οτι για κάθε $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$

$$(ab+bc+ca)^2 \geq abc(a+b+c)\,.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Αναπτύξτε το τετράγωνο στα αριστερά, και επεξεργαστείτε την παράσταση, ώστε να καταλήξετε στη μορφή $abc(a+b+c)+$ *ένα τετράγωνο.*

Άσκηση 4.7 Δείξτε οτι εάν $a,\ b,\ c > 0$, τότε

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc\,.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Χρησιμοποιήστε την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου όρου, $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, κλπ.

Άσκηση 4.8 Δείξτε οτι εάν $a^2+b^2 = 1$ και $x^2+y^2 = 1$, τότε

$$ax+by \leq 1\,.$$

Άσκηση 4.9 Δείξτε οτι εάν a, $b > 0$ και $a + b = 1$, τότε

α΄) $ab \leq \frac{1}{4}$

β΄) $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$

γ΄) $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$

δ΄) $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 9$