

## MEM201 ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

### Φυλλάδιο Προβλημάτων 4

Τετάρτη, 18/3/2015

**Άσκηση 4.1** Ποιές από τις παρακάτω ισότητες είναι αληθείς για κάθε  $x \neq 0$ ;

$$\alpha') \quad \left| x + \frac{1}{x} \right| = |x| + \frac{1}{|x|},$$

$$\beta') \quad \left| x - \frac{1}{x} \right| = |x| - \frac{1}{|x|}.$$

**Άσκηση 4.2** Να αποδείξετε την ακόλουθη ταυτότητα, γνωστή ως “κανόνας του παραλληλογράμμου”,

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί ονομάζεται έτσι;

**Άσκηση 4.3** Δείξτε ότι εάν  $0 \leq x \leq y$  τότε  $\frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y}$ .  
Χρησιμοποιήστε το προηγούμενο για να δείξετε ότι για  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a| + |b|}{1 + |a| + |b|} \leq \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}.$$

**Άσκηση 4.4** Να λύσετε τις ακόλουθες εξισώσεις.

$$\alpha') \quad |x + 1| - 2x = |x - 10| - 9,$$

$$\beta') \quad |x + 1| + |x - 1| + 3|x - 4| = 8,$$

$$\gamma') \quad x^2 - 3|x| + 2 = 0,$$

$$\delta') \quad x^2 - |x| - x - 15 = 0.$$

**Άσκηση 4.5** Να λύσετε τις ακόλουθες ανισώσεις.

$$\alpha') \quad \text{Πού συναληθεύουν οι } |x| - 3x > 5 \text{ και } |x + 8| - 1 > \frac{x + 1}{2},$$

$$\beta') \quad |x - 3| + |x + 2| + |x| > 6,$$

$$\gamma') \quad |x - 3| + |x + 2| + |x| > 0,$$

$$\delta') \quad |x - 3| + |x + 2| + |x| < 0.$$

**Άσκηση 4.6** Δείξτε ότι για κάθε  $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$(ab + bc + ca)^2 \geq abc(a + b + c).$$

**Άσκηση 4.7** Δείξτε ότι εάν  $a, b, c > 0$ , τότε

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc.$$

**Άσκηση 4.8** Δείξτε ότι εάν  $a^2 + b^2 = 1$  και  $x^2 + y^2 = 1$ , τότε

$$ax + by \leq 1.$$

**Άσκηση 4.9** Δείξτε ότι εάν  $a, b > 0$  και  $a + b = 1$ , τότε

$$\alpha') ab \leq \frac{1}{4}$$

$$\beta') a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$$

$$\gamma') a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$$

$$\delta') \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 9$$