

## MEM201 ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

### Φυλλάδιο Προβλημάτων 5

Τετάρτη, 25/3/2015

**Άσκηση 5.1** Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω αριθμοί είναι άρρητοι.

$$\alpha') \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}, \quad \beta') \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}, \quad \gamma') \log_{10} 2.$$

Υποδείξεις: Εάν  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} = r$ , εξετάστε τα  $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r - \sqrt{5}$ . Εάν  $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2} = r$ , εξετάστε τα  $r - \sqrt{2} = \sqrt[3]{2}$ .

**Άσκηση 5.2** Έστω  $m \geq 1$  φυσικός αριθμός.

- α') Δείξτε ότι ο αριθμός  $\sqrt{m(m+1)}$  είναι άρρητος.  
β') Δείξτε ότι ο αριθμός  $\sqrt{m} + \sqrt{m+1}$  είναι άρρητος.

#### Απάντηση - Υπόδειξη.

Για το (α'), δείξτε ότι  $m(m+1)$  δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Γιατί αυτό συνεπάγεται ότι  $\sqrt{m(m+1)}$  δεν είναι ρητός;

Για το (β'), χρησιμοποιήστε το ανάπτυγμα του  $(\sqrt{m} + \sqrt{m+1})^2$  για να δείξετε ότι εάν  $(\sqrt{m} + \sqrt{m+1})^2$  ήταν ρητός, το ίδιο θα ίσχυε και για τον  $\sqrt{m(m+1)}$ . Γιατί αυτό συνεπάγεται ότι  $\sqrt{m} + \sqrt{m+1}$  δεν είναι ρητός;

**Άσκηση 5.3** Γράψτε στη μορφή ρίζας ενός ρητού αριθμού τους

$$\alpha') \sqrt{3^3 \sqrt[3]{5^4 \sqrt{2}}}, \quad \beta') \frac{2^{\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{3\sqrt{5}}}.$$

Υποδείξεις: Χρησιμοποιήστε το συμβολισμό των κλασματικών εκθετών, για παράδειγμα,  $\sqrt[4]{2} = 2^{1/4}$ .

**Άσκηση 5.4** Να γράψετε ως άθροισμα δύο ριζών ρητών αριθμών τους

$$\alpha') \sqrt{28 + 10\sqrt{3}}, \quad \beta') \sqrt{7 + \sqrt{40}}.$$

Υποδείξεις: Προσπαθήστε να γράψετε την παράσταση κάτω από το ριζικό ως τετράγωνο.

#### Απάντηση - Υπόδειξη.

Για παράδειγμα,  $28 + 10\sqrt{3} = 25 + 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} + 3$ .

**Άσκηση 5.5** Να γράψετε τα ακόλουθα κλάσματα με ρητό παρονομαστή,

$$\alpha') \frac{2}{7-\sqrt{5+\sqrt{3}}}, \quad \beta') \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5+\sqrt{2}}},$$

$$\gamma') \frac{2}{\sqrt[3]{7}}, \quad \delta') \frac{1}{5+\sqrt[3]{2}}.$$

**Απάντηση - Υπόδειξη.**

α') Για να φύγουν τα ριζικά από τον παρονομαστή, πολλαπλασιάζουμε τον παρονομαστή με  $7 + \sqrt{5 + \sqrt{3}}$ . Απλοποιούμε και πολλαπλασιάζουμε ξανά με τον συζυγή του νέου παρονομαστή,  $44 + \sqrt{3}$ , για να καταλήξουμε σε ρητό παρονομαστή.

Παρόμοια για το (β').

Για το (δ'), πολλαπλασιάζουμε τον παρονομαστή με κατάλληλη παράσταση ώστε να τον γράψουμε ως άθροισμα κύβων,  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ .

**Άσκηση 5.6** Γράψτε ως άθροισμα ριζών ρητών αριθμών την παράσταση  $\sqrt{28 - 16\sqrt{3}}$ .

Κατόπιν γράψτε ως άθροισμα ριζών ρητών αριθμών την παράσταση  $\sqrt{\sqrt{28 - 16\sqrt{3}}}$ .

**Απάντηση - Υπόδειξη.**

Όπως στην 5.4, προσπαθούμε να φέρουμε την παράσταση κάτω από το ριζικό στη μορφή τετραγώνου.

**Άσκηση 5.7** Απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις χωρίς να κάνετε υπολογισμούς στο χαρτί. Παρατηρήστε τις εξισώσεις για να βρείτε τις ρίζες, ή να βρείτε μία από τις ρίζες και να συμπεράνετε την άλλη.

α') Λύστε την εξίσωση  $(8x + 6)(3x + 2) = 0$ .

β') Λύστε την εξίσωση  $\sqrt{2}x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$ .

γ') Λύστε την εξίσωση  $(a - b)x^2 + (b - c)x + c - a = 0$  όπου  $a \neq b$ .

**Άσκηση 5.8** Εάν γνωρίζετε ότι  $x = 2$  είναι μία ρίζα της εξίσωσης  $(\lambda^2 + 1)x^2 = 12\lambda + 4$ , βρείτε την άλλη ρίζα.

**Άσκηση 5.9** Να λυθεί η εξίσωση

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5 = 0.$$

**Άσκηση 5.10** Για ποιές τιμές του  $\lambda$  έχει διπλή ρίζα η  $x^2 + 2\lambda x + (\lambda - 1)^2 = 0$ .

**Άσκηση 5.11** Για ποιές τιμές του  $\lambda$  έχει πραγματικές ρίζες η  $3x^2 + 5x + \lambda = 0$ .