

MEM201 ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 5

Τετάρτη, 25/3/2015

Άσκηση 5.1 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω αριθμοί είναι άρρητοι.

$$\alpha') \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}, \quad \beta') \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}, \quad \gamma') \log_{10} 2.$$

Υποδείξεις: Εάν $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} = r$, εξετάστε τα $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r - \sqrt{5}$. Εάν $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2} = r$, εξετάστε τα $r - \sqrt{2} = \sqrt[3]{2}$.

Άσκηση 5.2 Έστω $m \geq 1$ φυσικός αριθμός.

- α') Δείξτε ότι ο αριθμός $\sqrt{m(m+1)}$ είναι άρρητος.
β') Δείξτε ότι ο αριθμός $\sqrt{m} + \sqrt{m+1}$ είναι άρρητος.

Άσκηση 5.3 Γράψτε στη μορφή ρίζας ενός ρητού αριθμού τους

$$\alpha') \sqrt{3^3 \sqrt[3]{5^4 \sqrt{2}}}, \quad \beta') \frac{2^{\frac{3}{3}} \sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{3 \sqrt{5}}}.$$

Υποδείξεις: Χρησιμοποιήστε το συμβολισμό των κλασματικών εκθετών, για παράδειγμα, $\sqrt[4]{2} = 2^{1/4}$.

Άσκηση 5.4 Να γράψετε ως άθροισμα δύο ριζών ρητών αριθμών τους

$$\alpha') \sqrt{28 + 10\sqrt{3}}, \quad \beta') \sqrt{7 + \sqrt{40}}.$$

Υποδείξεις: Προσπαθήστε να γράψετε την παράσταση κάτω από το ριζικό ως τετράγωνο.

Άσκηση 5.5 Να γράψετε τα ακόλουθα κλάσματα με ρητό παρονομαστή,

$$\alpha') \frac{2}{7 - \sqrt{5 + \sqrt{3}}}, \quad \beta') \frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{2}},$$
$$\gamma') \frac{2}{\sqrt[3]{7}}, \quad \delta') \frac{1}{5 + \sqrt[3]{2}}.$$

Άσκηση 5.6 Γράψτε ως άθροισμα ριζών ρητών αριθμών την παράσταση $\sqrt{28 - 16\sqrt{3}}$.

Κατόπιν γράψτε ως άθροισμα ριζών ρητών αριθμών την παράσταση $\sqrt{\sqrt{28 - 16\sqrt{3}}}$.

Άσκηση 5.7 Απαντήστε στις ακόλουθες ερωτήσεις χωρίς να κάνετε υπολογισμούς στο χαρτί. Παρατηρήστε τις εξισώσεις για να βρείτε τις ρίζες, ή να βρείτε μία από τις ρίζες και να συμπεράνετε την άλλη.

α') Λύστε την εξίσωση $(8x + 6)(3x + 2) = 0$.

β') Λύστε την εξίσωση $\sqrt{2}x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$.

γ') Λύστε την εξίσωση $(a - b)x^2 + (b - c)x + c - a = 0$ όπου $a \neq b$.

Άσκηση 5.8 Εάν γνωρίζετε ότι $x = 2$ είναι μία ρίζα της εξίσωσης $(\lambda^2 + 1)x^2 = 12\lambda + 4$, βρείτε την άλλη ρίζα.

Άσκηση 5.9 Να λυθεί η εξίσωση

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5 = 0.$$

Άσκηση 5.10 Για ποιές τιμές του λ έχει διπλή ρίζα η $x^2 + 2\lambda x + (\lambda - 1)^2 = 0$.

Άσκηση 5.11 Για ποιές τιμές του λ έχει πραγματικές ρίζες η $3x^2 + 5x + \lambda = 0$.