

MEM201 ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 6

Δευτέρα 30/3/2015

Άσκηση 6.1 Θεωρήστε την εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$.

- α'. Δείξτε ότι εάν $ac < 0$ τότε η εξίσωση έχει πραγματικές ετερόσημες ρίζες (δηλαδή οι δύο ρίζες έχουν διαφορετικό πρόσημο).
- β'. Δείξτε ότι εάν $\frac{b^2}{4} > ac > 0$ τότε η εξίσωση έχει πραγματικές ομόσημες ρίζες (δηλαδή οι δύο ρίζες έχουν το ίδιο πρόσημο).

Άσκηση 6.2 Θεωρήστε την εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$.

- α'. Δείξτε ότι εάν η μία ρίζα της εξίσωσης είναι διπλάσια από την άλλη, τότε ισχύει $2b^2 = 9ac$.
- β'. Δείξτε ότι εάν η μία ρίζα είναι κατά ένα μεγαλύτερη από την άλλη, τότε ισχύει $a^2 = b^2 - 4ac$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Εάν $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = 2 \cdot \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$, δείξτε ότι $b = \mp 3\sqrt{\Delta}$, για να καταλήξετε στο ζητούμενο.

Άσκηση 6.3 Θεωρήστε την εξίσωση $\lambda x^2 + (\lambda - 3)x + \lambda = 0$ με $\lambda \neq 0$.

- α'. Για ποιές τιμές του λ έχει η εξίσωση διπλή πραγματική ρίζα;
- β'. Για ποιές τιμές του λ έχει η εξίσωση ετερόσημες πραγματικές ρίζες;
- γ'. Για ποιές τιμές του λ έχει η εξίσωση θετικές πραγματικές ρίζες;
- δ'. Για ποιές τιμές του λ έχει η εξίσωση δύο διαφορετικές αρνητικές πραγματικές ρίζες;

Άσκηση 6.4 Δείξτε ότι δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 5 και γινόμενο 7.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Δύο αριθμοί με άθροισμα s και γινόμενο p είναι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - sx + p = 0$. Δείξτε ότι για $s = 5$ και $p = 7$ αυτή η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις.

Άσκηση 6.5 Θεωρήστε την εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$ και ρίζες ρ_1 και ρ_2 .

- α'. Χρησιμοποιήστε τους τύπους Vieta για να βρείτε μία εξίσωση με ρίζες $2\rho_1 + 5$ και $2\rho_2 + 5$.
- β'. Επαληθεύστε το αποτέλεσμα που βρήκατε στο (α') χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $y = 2x + 5$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Εάν $x^2 + ex + f = 0$ είναι η εξίσωση με ρίζες $2\rho_1 + 5$, $2\rho_2 + 5$, έχουμε $\rho_1 + \rho_2 = -\frac{b}{a}$ και $\rho_1\rho_2 = \frac{c}{a}$ ενώ $(2\rho_1 + 5) + (2\rho_2 + 5) = -e$ και $(2\rho_1 + 5)(2\rho_2 + 5) = f$. Από αυτές τις σχέσεις μπορείτε να υπολογίσετε τα f , e συναρτήσει των a , b , c .

Άσκηση 6.6 Θεωρήστε την εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$ και ρίζες ρ_1 και ρ_2 , και την εξίσωση $dx^2 + ex + f = 0$ με $d \neq 0$ και ρίζες ρ_3 και ρ_4 .

- α'. Εκφράστε συναρτήσει των συντελεστών a , b , c την παράσταση $\rho_1^5\rho_2^3 + \rho_1^3\rho_2^5$.
- β'. Εκφράστε συναρτήσει των συντελεστών a , b , c , d , e , f την παράσταση

$$(\rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_4)(\rho_1\rho_4 + \rho_2\rho_3).$$