

MEM201 ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 6

Δευτέρα 30/3/2015

Άσκηση 6.1 Θεωρήστε την εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$.

- α'. Δείξτε ότι εάν $ac < 0$ τότε η εξίσωση έχει πραγματικές ετερόσημες ρίζες (δηλαδή οι δύο ρίζες έχουν διαφορετικό πρόσημο).
- β'. Δείξτε ότι εάν $\frac{b^2}{4} > ac > 0$ τότε η εξίσωση έχει πραγματικές ομόσημες ρίζες (δηλαδή οι δύο ρίζες έχουν το ίδιο πρόσημο).

Άσκηση 6.2 Θεωρήστε την εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$.

- α'. Δείξτε ότι εάν η μία ρίζα της εξίσωσης είναι διπλάσια από την άλλη, τότε ισχύει $2b^2 = 9ac$.
- β'. Δείξτε ότι εάν η μία ρίζα είναι κατά ένα μεγαλύτερη από την άλλη, τότε ισχύει $a^2 = b^2 - 4ac$.

Άσκηση 6.3 Θεωρήστε την εξίσωση $\lambda x^2 + (\lambda - 3)x + \lambda = 0$ με $\lambda \neq 0$.

- α'. Για ποιές τιμές του λ έχει η εξίσωση διπλή πραγματική ρίζα;
- β'. Για ποιές τιμές του λ έχει η εξίσωση ετερόσημες πραγματικές ρίζες;
- γ'. Για ποιές τιμές του λ έχει η εξίσωση θετικές πραγματικές ρίζες;
- δ'. Για ποιές τιμές του λ έχει η εξίσωση δύο διαφορετικές αρνητικές πραγματικές ρίζες;

Άσκηση 6.4 Δείξτε ότι δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 5 και γινόμενο 7.

Άσκηση 6.5 Θεωρήστε την εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$ και ρίζες ρ_1 και ρ_2 .

- α'. Χρησιμοποιήστε τους τύπους Vieta για να βρείτε μία εξίσωση με ρίζες $2\rho_1 + 5$ και $2\rho_2 + 5$.
- β'. Επαληθεύστε το αποτέλεσμα που βρήκατε στο (α') χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $y = 2x + 5$.

Άσκηση 6.6 Θεωρήστε την εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$ και ρίζες ρ_1 και ρ_2 , και την εξίσωση $dx^2 + ex + f = 0$ με $d \neq 0$ και ρίζες ρ_3 και ρ_4 .

α'. Εκφράστε συναρτήσει των συντελεστών a, b, c την παράσταση $\rho_1^5 \rho_2^3 + \rho_1^3 \rho_2^5$.

β'. Εκφράστε συναρτήσει των συντελεστών a, b, c, d, e, f την παράσταση

$$(\rho_1 \rho_3 + \rho_2 \rho_4)(\rho_1 \rho_4 + \rho_2 \rho_3).$$