ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2014-15
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ201 ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 7

Τετάρτη 29/4/2015

***Άσκηση* 7.1** Να προσδιορίσετε το σύνολο λύσεων (ως σύνολο διατεταγμένων ζευγών) των συστημάτων

α΄. $$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 2 \end{array}$$

β΄. $$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array}$$

γ΄. $$\begin{array}{rcrcr} 0x & + & 0y & = & 1 \\ 0x & + & 0y & = & 0 \end{array}$$

δ΄. $$\begin{array}{rcrcr} 0x & + & 0y & = & 0 \\ 0x & + & 0y & = & 0 \end{array}$$

***Άσκηση* 7.2** Να επιλυθούν τα συστήματα

α΄. $$\begin{array}{rcrcr} 3|x| & + & y & = & 2 \\ x & - & 2y & = & 10 \end{array}$$

β΄. $$\begin{array}{rcrcr} |x| & + & y & = & 5 \\ x & - & 2|y| & = & 7 \end{array}$$

γ΄. $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 3z & = & -1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 9 \\ 2x & + & 2y & - & z & = & 18 \end{array}$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Εξετάζετε τις εξισώσεις σε κάθε διάστημα στο οποίο διαφέρει το πρόσημο κάποιας ποσότητας μέσα στην απόλυτη τιμή. Λύνετε τα διαφορετικά συστήματα που προκύπτουν, και ελέγχετε εάν οι λύσεις βρίσκονται μέσα στο αντίστοιχο διάστημα.
α΄) Για $x \geq 0$, η λύση είναι $x = 2$, $y = -4$. Για $x < 0$, η λύση είναι $x = -\frac{14}{5}$, $y = \frac{52}{5}$.
β΄) Εδώ πρέπει να εξετάσετε τέσσερεις περιπτώσεις, ανάλογα με το πρόσημο του x και του y: Για $x \geq 0$ και $y \geq 0$, η λύση του συστήματος που προκύπτει είναι $x = \frac{17}{3}$, $y = -\frac{2}{3}$, η οποία απορρίπτεται, αφού δεν ικανοποιείται η υπόθεση οτι $y \geq 0$. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις,

$x \geq 0$ και $y < 0$, $x < 0$ και $y \geq 0$, $x < 0$ και $y < 0$, επίσης απορρίπτονται οι λύσεις. Το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι $\varnothing$.

Άσκηση 7.3 Να λυθούν και να διερευνηθούν τα συστήματα

α΄. $$\begin{array}{rcrcl} 2(\lambda+1)x & + & \lambda y & = & \lambda \\ x & + & (\lambda+1)y & = & 1 \end{array}$$

β΄. $$\begin{array}{rcrcl} \lambda x & + & \mu y & = & \lambda^2+\mu^2 \\ (\lambda-\mu)x & + & (\lambda+\mu)y & = & 2(\lambda^2+\mu^2) \end{array}$$

γ΄. $$\begin{array}{rcrcl} (\lambda-\mu)x & + & (\lambda+\mu)y & = & 2(\lambda^2-\mu^2) \\ (\lambda+\mu)x & - & (\lambda-\mu)y & = & 4\lambda\mu \end{array}$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους έχει μοναδική λύση εάν και μόνον εάν η ορίζουσα των συντελεστών είναι $\neq 0$.
α΄) Η ορίζουσα είναι τριώνυμο στο λ με αρνητική διακρίνουσα. Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε τιμή του λ.
β΄) Μοναδική λύση όταν $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Όταν $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ το σύνολο λύσεων είναι όλο το $\mathbb{R}^2$.

Άσκηση 7.4 Να βρεθούν αριθμοί a και b έτσι ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις.

$$\begin{array}{rcrcl} ax & - & by & = & 4 \\ (b-1)x & + & (a+1)y & = & 3 \end{array}$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις όταν τα διανύσματα $\begin{bmatrix} a \\ b-1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -b \\ a+1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ είναι συγγραμμικά. Αυτό ισχύει όταν $a = -\frac{28}{25}$ και $b = \frac{4}{25}$.

Άσκηση 7.5 Να επιλυθούν τα συστήματα

α΄. $$\begin{array}{rcr} x+y & = & 5 \\ x^2+xy+y^2 & = & 19 \end{array}$$

β΄. $$\begin{array}{rcr} x-3y & = & 1 \\ x^2-xy+9y^2 & = & 17 \end{array}$$

γ΄. $$\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 8 \\ x^3 & - & y^3 & = & 992 \end{array}$$

δ΄. $$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ \frac{1}{x} & + & \frac{1}{y} & = & \frac{1}{6} \end{array}$$

ε΄. $$\begin{array}{rcr} xy & = & 30 \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2} & = & \frac{61}{900} \end{array}$$

ϛ′.
$$\begin{aligned} x+y+xy &= 19 \\ (x+y)xy &= 84 \end{aligned}$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

Σε αυτές τις εξισώσεις προσπαθούμε να βρούμε το άθροισμα και το γινόμενο των αγνώστων, ώστε να υπολογίσουμε τις λύσεις ως ρίζες ενός τριωνύμου.
α′) Έχουμε $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 = 25$ και $x^2+xy+y^2 = 19$. Άρα $xy = 6$.
β′) Έχουμε $(x-3y)^2 = x^2-6xy+9y^2 = 1$ και $x^2-xy+9y^2 = 17$. Άρα $-5xy = -16$. Καταλήγουμε οτι x και $-3y$ είναι ρίζες του τριωνύμου $\lambda^2-\lambda-\frac{48}{5}$.
γ′) Έχουμε $x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) = 992$ και $x-y = 8$. Καταλήγουμε οτι x και $-y$ είναι ρίζες του τριωνύμου $\lambda^2-8\lambda-20$.