

MEM201 ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 8

Τετάρτη 6/5/2015

Άσκηση 8.1 Να εκφράσετε ως άθροισμα απλών κλασμάτων τις παραστάσεις

α΄.

$$\frac{11x + 1}{(x + 1)(x - 4)(2x + 1)}$$

β΄.

$$\frac{x^2 - x + 1}{(x - 2)(x + 1)}$$

γ΄.

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 7x - 18}{x^2 - 9}$$

δ΄.

$$\frac{9}{(x + 1)(x - 2)^2}$$

ε΄.

$$\frac{x - 1}{x^2(x + 1)^2}$$

ς΄.

$$\frac{3x^3 + x + 1}{(x - 2)(x + 1)^3}$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

α΄.

$$\frac{11x + 1}{(x + 1)(x - 4)(2x + 1)} = \frac{-2}{x + 1} + \frac{1}{x - 4} + \frac{2}{2x + 1}.$$

β΄.

$$\frac{x^2 - x + 1}{(x - 2)(x + 1)} = x + 2 + \frac{2x}{x^2 - 9} = x + 2 + \frac{1}{x + 3} + \frac{1}{x - 3}.$$

ε'.

$$\frac{x-1}{x^2(x+1)^2} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Άσκηση 8.2 Να υπολογίσετε τα αθροίσματα

α'.

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 101} + \frac{1}{100 \cdot 102}$$

β'.

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n-1)(n+1)} + \frac{1}{n(n+2)}$$

γ'.

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 102} + \frac{1}{100 \cdot 103}$$

δ'.

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n-1)(n+2)} + \frac{1}{n(n+3)}$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

α') Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$, και υπολογίζουμε το άθροισμα τηλεσκοπικά, $\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{101+102}{101 \cdot 102} \right)$.

Άσκηση 8.3 Θεωρήστε γνωστά τα αθροίσματα $\sum k$, $\sum k^2$ και $\sum k^3$, που υπολογίζονται στις σημειώσεις, και υπολογίστε τα αθροίσματα

α'.

$$1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \cdots + 100 \cdot 101^2$$

β'.

$$1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \cdots + n \cdot (n+1)^2$$

γ'.

$$1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 6 + \cdots + n(n+1)(n+3)$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

α') Παρατηρούμε ότι $\sum_{k=1}^n k(k+1)^2 = \sum_{k=1}^n (k^3 + 2k^2 + k)$.

Άσκηση 8.4 Χρησιμοποιήστε τα αθροίσματα $\sum k$, $\sum k^2$ και $\sum k^3$ και το ανάπτυγμα του $(k+1)^5$ για να υπολογίσετε το άθροισμα

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4.$$

Υπολογίστε το άθροισμα

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5.$$

Άσκηση 8.5 Χρησιμοποιήστε την τηλεσκοπική μέθοδο για να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
 $\sqrt{n+1} - 1.$