ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Εαρινό Εξάμηνο 2014-15
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ201 ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 9

Δευτέρα 11/5/2015

Άσκηση 9.1 Γράψτε σε τριγωνομετρική και σε εκθετική μορφή τους αριθμούς

α΄. -10 β΄. $10\mathrm{i}$
γ΄. $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ δ΄. $-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$

Απάντηση - Υπόδειξη.
$-10 = 10\cos\pi = 10e^{\mathrm{i}\pi}$, $10\mathrm{i} = \mathrm{i}10\sin\frac{\pi}{2} = 10e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$
$1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}) = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$,
$-11+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}) = 2e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

Άσκηση 9.2 Υπολογίστε τους αριθμούς

α΄. $\dfrac{7(\cos 130^\circ + \mathrm{i}\sin 130^\circ)}{14(\cos(-20^\circ) + \mathrm{i}\sin(-20^\circ))}$

β΄. $\left[3\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)\right]^8$

γ΄. $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^{2015}$

Απάντηση - Υπόδειξη.
α΄. $\frac{1}{4}(-\sqrt{3}+\mathrm{i})$
β΄. -3^8.
γ΄. $\frac{1}{2}(1-\mathrm{i}\sqrt{3})$.

Άσκηση 9.3 Περιγράψτε γεωμετρικά τα υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου

α΄. $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-1| \leq 1\}$ β΄. $\{z \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z\}$

γ΄. $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Re} z > 0\}$ δ΄. $\{z \in \mathbb{C} \,:\, z + \overline{z} = 0\}$

Απάντηση - Υπόδειξη.
α′. Ο δίσκος με κέντρο 0 και ακτίνα 1, μαζί με το σύνορό του.
β′. Η ευθεία $x + y = 0$.
γ′. Το άνω ημιεπίπεδο, χωρίς το σύνορο.
δ′. Ο φανταστικός άξονας.

Άσκηση 9.4 Λύστε τις εξισώσεις

α′. $z^8 = 1$	β′. $z^3 = -\mathrm{i}$
γ′. $z^3 = 2 + 2\mathrm{i}$	δ′. $z^3 + 3z^2 + 4z = 8$

Απάντηση - Υπόδειξη.
α′. $z = e^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{4}}$ για $k = 0, 1, \ldots, 7$.
β′. $z = \mathrm{i}$, $z = \mathrm{i}\omega_3 = e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2}(\sqrt{3} + \mathrm{i})$,
$z = \mathrm{i}\omega_3^2 = e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - \mathrm{i})$.
γ′. $z = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}}$ για $k = 0, 1, 2$.
δ′. Παρατηρούμε οτι μία ρίζα είναι $z = 1$. Διαιρούμε με $z-1$. Οι άλλες ρίζες είναι $z = -2\pm 2\mathrm{i}$.

Άσκηση 9.5 Δείξτε ότι οι δυνάμεις οποιασδήποτε πέμπτης ρίζας της μονάδας διαφορετικής από το 1, παράγουν και τις 5 πέμπτες ρίζες.
Δείξτε ότι αυτό δεν ισχύει για τις 6 έκτες ρίζες: βρείτε δύο έκτες ρίζες τις μονάδας τέτοιες ώστε καμία δύναμη της μίας να μην είναι ίση με την άλλη.

Άσκηση 9.6 Βρείτε τα $\sin\vartheta$ και $\cos\vartheta$

α′. εάν $\tan\vartheta = \frac{12}{13}$ και $\pi < \vartheta < \frac{3\pi}{2}$,

β′. εάν $\tan\vartheta = \frac{-4}{5}$ και $\cos\vartheta < 0$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
α′. Έστω $\sin\vartheta = 12t$ και $\cos\vartheta = 13t$. Τότε $144t^2 + 169t^2 = 1$, και καταλήγουμε οτι $\sin\vartheta = -\frac{12}{\sqrt{313}}$ και $\cos\vartheta = -\frac{13}{\sqrt{313}}$.

Άσκηση 9.7 Αποδείξτε οτι

$$\sin\frac{5\pi}{4}\cos\frac{7\pi}{6}\tan\frac{4\pi}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Άσκηση 9.8 Αποδείξτε οτι εάν $a\sin^2\vartheta + b\cos^2\vartheta = c$ και $a \neq b$, τότε $\tan^2\vartheta = \frac{c-b}{a-c}$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Γράψτε το c ως $c\cos^2\vartheta + c\sin^2\vartheta$.

Άσκηση 9.9 Αποδείξτε οτι εάν $\tan^2\vartheta = 2\tan^2\varphi + 1$, τότε $2\cos^2\vartheta = \cos^2\varphi$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Χρησιμοποιήστε τη σχέση $\tan^2\vartheta = \frac{1}{\cos^2\vartheta} - 1$.

Άσκηση 9.10 Αν οι αριθμοί $\tan\vartheta$ και $\tan\varphi$ είναι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$, εκφράστε την παράσταση

$$\frac{\sin\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta\sin\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi}{\cos\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\cos\varphi - \cos\vartheta\sin\varphi}$$

συναρτήσει των a, b και c.

Άσκηση 9.11 Να αποδείξετε οτι οι ακόλουθες παραστάσεις είναι σταθερές, ανεξάρτητες από τα ϑ και φ.

α΄.
$$\sin\vartheta + \sin(\frac{\pi}{2} - \vartheta) + \sin(\pi + \vartheta) + \sin(\frac{3\pi}{2} - \vartheta)\,,$$

β΄.
$$\frac{\cos^2\vartheta - \cos^2\varphi}{\sin^2\vartheta - \sin^2\varphi}\,,$$

γ΄.
$$\sin^4\vartheta - \cos^4\vartheta - 2\sin^2\vartheta\,,$$

δ΄.
$$\sin^6 + \cos^6\vartheta + 3\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\,.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
α΄. 0. β΄. -1. γ΄. -1. δ΄. 1.

Άσκηση 9.12 Εάν $\sin\vartheta + \cos\vartheta = \lambda$ εκφράστε τις ακόλουθες παραστάσεις συναρτήσει του λ.

α΄.
$$\sin\vartheta\cos\vartheta\,,$$

β΄.
$$\sin^3\vartheta + \cos^3\vartheta\,,$$

γ΄.
$$\tan\vartheta + \cot\vartheta\,.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.
α΄. $\frac{\lambda^2-1}{2}$. β΄. $-\frac{1}{2}\lambda^3 + \frac{3}{2}\lambda$. γ΄. $\frac{2}{\lambda^2-1}$.