

MEM201 ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 9

Δευτέρα 11/5/2015

Άσκηση 9.1 Γράψτε σε τριγωνομετρική και σε εκθετική μορφή τους αριθμούς

$$\begin{array}{ll} \alpha'. -10 & \beta'. 10i \\ \gamma'. 1 + i\sqrt{3} & \delta'. -1 + i\sqrt{3} \end{array}$$

Άσκηση 9.2 Υπολογίστε τους αριθμούς

$$\alpha'. \frac{7(\cos 130^\circ + i \sin 130^\circ)}{14(\cos(-20^\circ) + i \sin(-20^\circ))}$$

$$\beta'. \left[3 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \right]^8$$

$$\gamma'. \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^{2015}$$

Άσκηση 9.3 Περιγράψτε γεωμετρικά τα υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου

$$\alpha'. \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 1\} \quad \beta'. \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z\}$$

$$\gamma'. \mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \quad \delta'. \{z \in \mathbb{C} : z + \bar{z} = 0\}$$

Άσκηση 9.4 Λύστε τις εξισώσεις

$$\alpha'. z^8 = 1 \quad \beta'. z^3 = -i$$

$$\gamma'. z^3 = 2 + 2i \quad \delta'. z^3 + 3z^2 + 4z = 8$$

Άσκηση 9.5 Δείξτε ότι οι δυνάμεις οποιασδήποτε πέμπτης ρίζας της μονάδας διαφορετικής από το 1, παράγουν και τις 5 πέμπτες ρίζες.

Δείξτε ότι αυτό δεν ισχύει για τις 6 έκτης ρίζες: βρείτε δύο έκτης ρίζες τις μονάδας τέτοιες ώστε καμία δύναμη της μίας να μην είναι ίση με την άλλη.

Άσκηση 9.6 Βρείτε τα $\sin \vartheta$ και $\cos \vartheta$

α'. εάν $\tan \vartheta = \frac{12}{13}$ και $\pi < \vartheta < \frac{3\pi}{2}$,

β'. εάν $\tan \vartheta = \frac{-4}{5}$ και $\cos \vartheta < 0$.

Άσκηση 9.7 Αποδείξτε ότι

$$\sin \frac{5\pi}{4} \cos \frac{7\pi}{6} \tan \frac{4\pi}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Άσκηση 9.8 Αποδείξτε ότι εάν $a \sin^2 \vartheta + b \cos^2 \vartheta = c$ και $a \neq b$, τότε $\tan^2 \vartheta = \frac{c-b}{a-c}$.

Άσκηση 9.9 Αποδείξτε ότι εάν $\tan^2 \vartheta = 2 \tan^2 \varphi + 1$, τότε $2 \cos^2 \vartheta = \cos^2 \varphi$.

Άσκηση 9.10 Αν οι αριθμοί $\tan \vartheta$ και $\tan \varphi$ είναι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$, εκφράστε την παράσταση

$$\frac{\sin \vartheta \cos \varphi + \cos \vartheta \sin \varphi + \sin \vartheta \sin \varphi}{\cos \vartheta \cos \varphi - \sin \vartheta \cos \varphi - \cos \vartheta \sin \varphi}$$

συναρτήσει των a , b και c .

Άσκηση 9.11 Να αποδείξετε ότι οι ακόλουθες παραστάσεις είναι σταθερές, ανεξάρτητες από τα ϑ και φ .

α'.

$$\sin \vartheta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) + \sin(\pi + \vartheta) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \vartheta\right),$$

β'.

$$\frac{\cos^2 \vartheta - \cos^2 \varphi}{\sin^2 \vartheta - \sin^2 \varphi},$$

γ'.

$$\sin^4 \vartheta - \cos^4 \vartheta - 2 \sin^2 \vartheta,$$

δ'.

$$\sin^6 + \cos^6 \vartheta + 3 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta.$$

Άσκηση 9.12 Εάν $\sin \vartheta + \cos \vartheta = \lambda$ εκφράστε τις ακόλουθες παραστάσεις συναρτήσει του λ .

α'.

$$\sin \vartheta \cos \vartheta,$$

β'.

$$\sin^3 \vartheta + \cos^3 \vartheta,$$

γ'.

$$\tan \vartheta + \cot \vartheta.$$