Πρόχειρες σημειώσεις μαθήματος

Γενικά Μαθηματικά

Μιχάλης Λάμπρου

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

2015

Κεφάλαιο 1

Άλγεβρα των πραγματικών αριθμών

1.1 Ιδιότητες των πραγματικών αριθμών

Θεωρούμε ότι ο αναγνώστης είναι εξοικειωμένος με τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ αλλά ειδικά για τα δύο τελευταία θα είμαστε λίγο αναλυτικότεροι. Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίζουμε δύο πράξεις, την πρόσθεση $(+)$ και τον πολλαπλασιασμό $(\cdot)$. Οι πράξεις αυτές έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Αντιμεταθετική ιδιότητα

   $a + b = b + a$

   $ab = ba$

2. Προσεταιριστική ιδιότητα

   $a(bc) = (ab)c$

   $(a + b) + c = a + (b + c)$

3. Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο $0 \in \mathbb{R}$ της πρόσθεσης, με την ιδιότητα

   $a + 0 = 0 + a = a$

4. Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο $1 \in \mathbb{R}$, με $1 \neq 0$ και με την ιδιότητα

   $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

5. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο $-a$, το αντίθετο του a, με την ιδιότητα

   $a + (-a) = 0$

6. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$, υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο $\dfrac{1}{a}$, το αντίστροφο του a, με την ιδιότητα $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$

7. Ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα $a(b+c) = ab + ac$

Από τις παραπάνω έπονται άλλες ιδιότητες των πράξεων, όπως οι παρακάτω:

1. $a + c = b + c \Rightarrow a = b$

   Απόδειξη

   $$\begin{aligned} a + c &= b + c \\ (a+c) + (-c) &= (b+c) + (-c) \\ a + (c + (-c)) &= b + (c + (-c)) \\ a + 0 &= b + 0 \\ a &= b \end{aligned}$$

   □

2. $a + b = c \Leftrightarrow a = c - b$

3. Αν $a \neq 0$, τότε: $ab = ac \Leftrightarrow b = c$

   Απόδειξη

   $$\begin{aligned} ab &= ac \\ (ab) \cdot \tfrac{1}{a} &= (ac) \cdot \tfrac{1}{a} \\ (ba) \cdot \tfrac{1}{a} &= (ca) \cdot \tfrac{1}{a} \\ b(a \cdot \tfrac{1}{a}) &= c(a \cdot \tfrac{1}{a}) \\ b \cdot 1 &= c \cdot 1 \\ b &= c \end{aligned}$$

   □

4. $a \cdot 0 = 0$

   Απόδειξη

   $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$

   Άρα $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$. Επομένως, από το 1. έπεται $a \cdot 0 = 0$

   □

5. $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ή $b = 0$

   Απόδειξη Αν $a \neq 0$, τότε $b = \dfrac{1}{a} \cdot ab = \dfrac{1}{a} \cdot 0 = 0$

   □

6. $(-a)b = -(ab)$

   Απόδειξη

   $ab + (-a)b = (a + (-a))b = 0 \cdot b = 0$

   Άρα

   $(-a)b = -(ab)$

   $\square$

7. $(-a)(-b) = ab$

1.2 Δυνάμεις

Ορισμός. Αν $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $a^1 = a$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ φορές}}$

Μερικές άμεσες ιδιότητες περιέχονται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.1 *Αν m, $n \in \mathbb{N}^*$ τότε*

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n b^n$
4. *αν $n > m$ τότε* $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Απόδειξη

1. $a^m a^n = \underbrace{(a \cdot ... \cdot a)}_{m-\text{φορές}} \cdot \underbrace{(a \cdot ... \cdot a)}_{n-\text{φορές}} = \underbrace{a \cdot ... \cdot a}_{m+n-\text{φορές}} = a^{m+n}$
2. Όμοια
3. $(ab)^n = \underbrace{(ab) \cdot ... \cdot (ab)}_{n-\text{φορές}} = \underbrace{(a \cdot ... \cdot a)}_{n-\text{φορές}} \cdot \underbrace{(b \cdot ... \cdot b)}_{n-\text{φορές}} = a^n b^n$
4. 'Ομοια

$\square$

Ο προηγούμενος ορισμός επεκτείνεται σε εκθέτες $n \in \mathbb{Z}$ ενώ αργότερα θα επεκταθεί σε ρητούς και, ακόμη γενικότερα, σε πραγματικούς εκθέτες. Η ιδέα είναι να οριστούν με τέτοιο τρόπο οι δυνάμεις, ώστε να διατηρούνται οι παραπάνω ιδιότητες. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να ισχύει η $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $n > m$ ακόμη και αν $n = m$, τότε η σωστή επιλογή του εμφανιζόμενου a^0 στο δεξί μέλος να είναι $\frac{a^n}{a^m} = \frac{a^n}{a^n} = 1$. Με οδηγό αυτή την παρατήρηση έχουμε

Ορισμός. Αν $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, ορίζουμε $a^0 = 1$ και για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Αποδεικνύεται ότι οι τύποι (για a, $b \neq 0$)
$a^k a^l = a^{k+l}$
$(a^k)^l = a^k l$
$(ab)^k = a^k b^k$
$\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$
επεκτείνονται και στην περίπτωση k, $l \in \mathbb{Z}$.
Πράγματι, ας δούμε απόδειξη του $a^k a^l = a^{k+l}$ με k, $l \in \mathbb{Z}$
Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Αν $k > 0$, $l > 0$, το δείξαμε ήδη.

2. Αν $k = 0$, $l > 0$, τότε $a^k a^l = a^0 \cdot a^l = 1 \cdot a^l = a^l = a^{0+l} = a^{k+l}$

3. Αν $k > 0$, $l < 0$, $k + l > 0$, τότε

   $a^k a^l = a^{k+l-l} a^l = a^{k+l} a^{-l} a^l = a^{k+l} a^{-l} \cdot \frac{1}{a^{-l}} = a^{k+l}$

4. Αν $k > 0$, $l < 0$, $k + l = 0$, όμοια.

5. Αν $k > 0$, $l < 0$, $k + l < 0$, όμοια.

6. Αν $k < 0$, $l < 0$, τότε $a^{k+l} = \frac{1}{a^{-k-l}} = \frac{1}{a^{-k} a^{-l}} = \frac{1}{a^{-k}} \cdot \frac{1}{a^{-l}} = a^k a^l$.

1.3 Ταυτότητες

Υπάρχει πληθώρα ταυτοτήτων, μερικές από τις οποίες καταγράφονται στα παρακάτω. Η απόδειξή τους γίνεται με χρήση των παραπάνω ιδιοτήτων των πράξεων στο $\mathbb{R}$, με άνοιγμα παρενθέσεων και λοιπά. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\
\text{(από επιμεριστική ιδιότητα)} &= (a+b)a+(a+b)b \\
\text{(από επιμεριστική ιδιότητα)} &= (a^2+ba)+(ab+b^2) \\
\text{(από προσεταιριστική ιδιότητα)} &= a^2+ba+ab+b^2 \\
\text{(από προσεταιριστική ιδιότητα)} &= a^2+2ab+b^2
\end{aligned}$$

Όμοια αποδεικνύονται οι ακόλουθες αρκετά στοιχειώδεις ταυτότητες,

- $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$
- $(x-a)(x+b) = x^2+(-a+b)x-ab$
- $(x-a)(x-b) = x^2-(a+b)x+ab$
- $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$
- $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$
- $(a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$
- $(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$
- $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
- $(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2+(ay-bx)^2$
- $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2 = (ay-bx)^2+(az-cy)^2+(bz-cy)^2$

Ειδική κατηγορία ταυτοτήτων είναι το λεγόμενο ανάπτυγμα του διωνύμου. Τις πρώτες τρεις από τις παρακάτω τις είδαμε ήδη. Η κάθε επόμενη αποδεικνύεται από την προηγούμενη αφού πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη επί $a+b$ και εκτελέσουμε τις πράξεις. Με άνοιγμα των παρενθέσεων στο δεξί μέλος θα διαπιστώνουμε ότι ισχύει

- $(a+b)^1 = a+b$
- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
- $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$
- $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
- $(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

και ούτω καθεξής. Αποδεικνύεται με επαγωγή, και θα το δούμε αργότερα, ότι οι συντελεστές του $(a+b)^n$ στο δεξί μέλος δίνονται από το Τρίγωνο Pascal, στο οποίο κάθε αριθμός είναι το άθροισμα των δύο αριθμών, που βρίσκονται από πάνω από αυτόν (δεξιά και αριστερά). Οι πρώτες λίγες γραμμές του τριγώνου Pascal είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Τα αναπτύγματα των $(a-b)^2$, $(a-b)^3$, $(a-b)^4$, $(a-b)^5$ και λοιπά είναι άμεσα από τις προηγούμενες θέτοντας $-b$ στη θέση του b. Για παράδειγμα θα διαπιστώσουμε ότι

$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

και ανάλογα οι υπόλοιπες.

Από τις παραπάνω, ή με απευθείας άνοιγμα των παρενθέσεων, έχουμε ακόμη

- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
- $(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$
- $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$
- $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- (Ταυτότητα Euler)

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= \tfrac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \end{aligned}$$

Πόρισμα 1.1 *Αν* $a+b+c=0$ *τότε* $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Απόδειξη **α′ τρόπος** Αν $a+b+c=0$ τότε, από την ταυτότητα του Euler, έχουμε

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$

Άρα $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

β′ τρόπος Αφού $a+b+c=0$ έχουμε $a+b=-c$. οπότε

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= (-c)^3 \\ a^3 + b^3 + 3ab(a+b) &= -c^3 \\ a^3 + b^3 + 3ab(-c) &= -c^3 \\ a^3 + b^3 - 3abc &= -c^3 \\ a^3 + b^3 + c^3 &= 3abc \end{aligned}$$

□

Αξιοσημείωτα πηλίκα

Αν $n \in \mathbb{N}^*$ τότε

- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ ... \ + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$

Αν n περιττός τότε

- $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ ... \ + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$

Παράδειγμα 1.1 Να αποδειχθεί η ταυτότητα

$(a-b)ab + (b-c)bc + (c-a)ca = -(a-b)(b-c)(c-a).$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}
(a-b)ab + (b-c)bc + (c-a)ca &= (a-b)ab + c^2(a-b) + c(b^2-a^2) \\
&= (a-b)ab + (a-b)c^2 - c(a-b)(a+b) \\
&= (a-b)[ab + c^2 - c(a+b)] \\
&= (a-b)(ab + c^2 - ac - bc) \\
&= (a-b)(a(b-c) - c(b-c)) \\
&= (a-b)(b-c)(a-c) \\
&= -(a-b)(b-c)(c-a)
\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 1.2 Αν $a+b+c = 2t$ δείξτε ότι

$$\frac{1}{t-a} + \frac{1}{t-b} + \frac{1}{t-c} - \frac{1}{t} = \frac{abc}{t(t-a)(t-b)(t-c)}$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t-a} + \frac{1}{t-b} + \frac{1}{t-c} - \frac{1}{t} = \frac{t-b+t-a}{(t-a)(t-b)} + \frac{t-(t-c)}{(t-c)t} &= \frac{2t-(a+b)}{(t-a)(t-b)} + \frac{t-t+c}{t(t-c)} \\
&= \frac{c}{(t-a)(t-b)} + \frac{c}{t(t-c)} \\
&= \frac{c[t(t-c)+(t-a)(t-b)]}{t(t-a)(t-b)(t-c)} \\
&= \frac{c[t^2-ct+t^2-(a+b)t+ab]}{t(t-a)(t-b)(t-c)} \\
&= \frac{c(2t^2-ct-2t^2+ct+ab)}{t(t-a)(t-b)(t-c)} \\
&= \frac{abc}{t(t-a)(t-b)(t-c)}
\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 1.3 Αν $x+y = A$, $xy = B$, να εκφραστούν τα x^2+y^2, x^3+y^3 συναρτήσει των A και B.

Λύση Έχουμε $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = A^2 - 2B$ και

$x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = A^3 - 3AB.$

Παράδειγμα 1.4 Αν $a+b+c = ab+bc+ca$ και $abc = 1$, να αποδειχθεί ότι κάποιος από τους a, b, c ισούται με 1.

Απόδειξη Αναπτύσσοντας βρίσκουμε ότι
$(a-1)(b-1)(c-1) = abc - (ab+bc+ca) + (a+b+c) - 1 =$
$= -(ab+bc+ca) + (a+b+c) = 0.$
Άρα τουλάχιστον ένας από τους $a-1$, $b-1$, $c-1$ ισούται με 0, όπως θέλαμε.

□

Παράδειγμα 1.5

Το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών ακεραίων αυξημένο κατά μία μονάδα είναι τέλειο τετράγωνο.

Απόδειξη Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ο $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ είναι τέλειο τετράγωνο. Έχουμε
$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = [n(n+3)]\,[(n+1)(n+2)]+1$
$= (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 = (n^2+3n)+2(n^2+3n)+1 = (n^2+3n+1)^2$

□

Παράδειγμα 1.6

Να αποδειχθεί ότι ο 31 και ο 511 είναι διαιρέτες του $2^{45}-1$

Απόδειξη

Έχουμε από τα αξιοσημείωτα πηλίκα ότι
$2^{45}-1 = (2^5)^9 - 1^9 = (2^5-1)\,((2^5)^8 + (2^5)^7 + ... + 1) = 31\,(2^{40} + 2^{35} + ... + 1)$
και
$2^{45}-1 = (2^9)^5 - 1^5 = (2^9-1)\,((2^9)^4 + (2^9)^3 + ... + 1) = 511\,(2^{36} + 2^{27} + ... + 1)$

□

Άσκηση 1.1 Αν $a, b \in \mathbb{N}$ τότε ο $a+b$ διαιρεί τον a^3+b^3. Αυτό το συμβολίζουμε $(a+b)|\,(a^3+b^3)$.

1.4 Παραγοντοποίηση

Απλά παραδείγματα, με χρήση κοινού παράγοντα

1. $3a^2b + 9ab^3 = 3ab(a+3b^2)$

2. $10a^4 - 25a^3b = 5a^3(2a-5b)$

3. $a^2 - ab + ac - bc = a(a-b) + c(a-b) = (a-b)(a+c)$

4. $6a^2 + 2ax + 9ab + 3bx = 2a(3a + x) + 3b(3a + x) = (3a + x)(2a + 3b)$

Παραδείγματα με χρήση ταυτοτήτων

5. $9a^2 + 30ax + 25x^2 = (3a)^2 + 2(3a)(5x) + (5x)^2 = (3a + 5x)^2$

6. $16a^2 - 25b^2 = (4a)^2 - (5b)^2 = (4a - 5b)(4a + 5b)$

7. $81a^4 - 16x^8 = (9a^2)^2 - (4x^4)^2 = (9a^2 - 4x^4)(9a^2 + 4x^4) =$
$= (3a - 2x^2)(3a + 2x^2)(9a^2 + 4x^4)$

8. $64x^3 + 1 = (4x)^3 + 1^3 = (4x + 1)(16x^2 - 4x + 1)$

Σε σε πιο σύνθετα παραδείγματα χρειάζεται να προσθαφαιρέσουμε πρώτα κάποιους όρους πριν κάνουμε την παραγοντοποίηση.

1. $a^4+a^2b^2+b^4 = a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2 = (a^2+b^2)-(ab)^2 = (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

2. (ταυτότητα Germain) $a^4+4b^4 = (a^4+4a^2b^2+4b^4)-4a^2b^2 = (a^2+2b^2)^2-(2ab)^2 =$
$(a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$

Παράδειγμα 1.7 Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση
$A = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
A &= a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 \\
&= a^4 + b^4 + (-c^2)^2 + 2a^2b^2 + 2b^2(-c^2) + 2(-c^2)a^2 - 4a^2b^2 \\
&= (a^2 + b^2 - c^2)^2 - (2ab)^2 \\
&= (a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 - 2ab) \\
&= [(a + b)^2 - c^2][(a - b)^2 - c^2] \\
&= (a + b + c)(a + b - c)(a - b - c)(a - b + c)
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.8 Να απλοποιηθεί η παράσταση $B = \dfrac{a^3 - a^2b - ab^2 - 2b^3}{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 2b^3}$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
B &= \frac{a^3 - a^2b - ab^2 - 2b^3}{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 2b^3} \\
&= \frac{(a^3 - b^3) - b(a^2 + ab + b^2)}{(a+b)^3 + b^3} \\
&= \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2)}{[(a+b+b][(a+b)^2 - (a+b)b + b^2]} \\
&= \frac{(a^2 + ab + b^2)(a - 2b)}{(a+2b)(a^2 + 2ab + b^2 - ab - b^2 + b^2)} \\
&= \frac{(a^2 + ab + b^2)(a - 2b)}{(a+2b)(a^2 + ab + b^2)} \\
&= \frac{a - 2b}{a + 2b}
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.9 Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό n, ο $81^n + 2500$ είναι σύνθετος.

Λύση Πρέπει να αποδείξουμε ότι ο αριθμός που δόθηκε γράφεται ως γινόμενο φυσικών αριθμών μεγαλύτερων του 1. Από την ταυτότητα Germain έχουμε

$81^n + 2500 = (3^n)^4 + 4 \cdot 5^4 = (3^{2n} - 2 \cdot 3^n \cdot 5 + 2 \cdot 5^2)(3^{2n} + 2 \cdot 3^n \cdot 5 + 2 \cdot 5^2)$

Πρέπει τώρα να αποδείξουμε για τον μικρότερο από τους δύο παράγοντες ότι ισχύει $3^{2n} - 2 \cdot 3^n \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 > 1$. Ένας τρόπος είναι με ανισότητες. Συγκεκριμένα

$3^{2n} - 2 \cdot 3^n \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 = (3^{2n} - 2 \cdot 3^n \cdot 5 + 5^2) + 5^2 = (3^n - 5)^2 + 25 \geq 25 > 1$

Άλλος τρόπος είναι με διαιρετότητα. Αν ίσχυε $3^{2n} - 2 \cdot 3^n \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 = 1$ τότε $3^{2n} - 2 \cdot 3^n \cdot 5 = -49$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί το αριστερό μέλος είναι πολλαπλάσιο του 3, αλλά όχι το δεξί.

1.5 Πρωτοβάθμιες Εξισώσεις $ax + b = 0$

Οι πρωτοβάθμιες εξισώσεις είναι απλές. Εμφανίζονται τρεις χαρακτηριστικές περιπτώσεις, όπως τα παρακάτω παραδείγματα:

1. $2x = 3$. Μοναδική λύση $x = \frac{3}{2}$, σύνολο λύσεων το $\{\frac{3}{2}\}$.

2. $0x = 3$. Αδύνατη, σύνολο λύσεων το $\varnothing$.

3. $0x = 0$. Αόριστη, σύνολο λύσεων το $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 1.10 Να επιλυθεί η εξίσωση $\frac{x-7}{x-9} - \frac{x-8}{x-10} = \frac{x-4}{x-6} - \frac{x-5}{x-7}$

Λύση

Από τη μορφή της εξίσωσης, έχουμε τους ακόλουθους περιορισμούς για το x:

$x \neq 6$, $x \neq 7$, $x \neq 9$, $x \neq 10$.

Το αριστερό μέλος ισούται

$1+\frac{2}{x-9}-(1+\frac{2}{x-10}) = \frac{2}{x-9}-\frac{2}{x-10} = \frac{2(x-10-x+9)}{(x-9)(x-10)} = -\frac{2}{(x-9)(x-10)}$.

Όμοια το δεξί μέλος ισούται

$\frac{x-4}{x-6} - \frac{x-5}{x-7} = -\frac{2}{(x-6(x-7)}$.

Η εξίσωση τώρα γράφεται

$-\frac{1}{(x-9)(x-10)} = -\frac{1}{(x-6)(x-7)}$

ισοδύναμα

$(x-9)(x-10) = (x-6)(x-7)$ ή $x^2 - 13x + 42 = x^2 - 19x + 90$ ή $6x = 48$.

Καταλήγουμε στο $x = 8$, η οποία είναι δεκτή ως λύση.

Παράδειγμα 1.11 Να επιλυθεί για τις διάφορες τιμές του λ (δηλαδή να γίνει διερεύνηση), η εξίσωση $\lambda(\lambda - x) - 3x = 5(\lambda - x) - 6$.

ΛύσηΙσχύει

$\lambda^2 - \lambda x - 3x = 5\lambda - 5x - 6$

$\Leftrightarrow (2-\lambda)x = 5\lambda - 6 - \lambda^2$

$\Leftrightarrow (\lambda - 2)x = \lambda^2 - 5\lambda + 6$.

Ο συντελεστής $\lambda - 2$ του x μηδενίζεται όταν $\lambda = 2$. Γι' αυτό εξετάζουμε χωριστά τις περιπτώσεις $\lambda = 2$ και $\lambda \neq \pm 2$

Περίπτωση Ι

Για $\lambda \neq 2$ η εξίσωση έχει λύση τη $x = \frac{(\lambda-3)(\lambda-2)}{\lambda-2} = \lambda - 3$

Περίπτωση ΙΙ

Για $\lambda = 2$ η εξίσωση γίνεται $0x = 0$, που είναι αόριστη.

Παράδειγμα 1.12 Να επιλυθεί η εξίσωση $(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 + 3\lambda$

Λύση Ο συντελεστής $\lambda^2 - 9$ του x μηδενίζεται όταν $\lambda = \pm 3$. Εξετάζουμε χωριστά τις περιπτώσεις $\lambda = 3$, $\lambda = -3$ και $\lambda \neq \pm 3$.

Περίπτωση Ι

Για $\lambda \neq 3$, και $\lambda \neq -3$ η εξίσωση έχει λύση την $x = \frac{\lambda^2+3\lambda}{\lambda^2-9} = \frac{\lambda(\lambda+3)}{(\lambda+3)(\lambda-3)} = \frac{\lambda}{\lambda-3}$

Περίπτωση ΙΙ

Για $\lambda = 3$ η εξίσωση γίνεται $0x = 18$, αδύνατη

Περίπτωση ΙΙΙ

Για $\lambda = -3$ η εξίσωση γίνεται $0x = 0$, αόριστη

Ο παρακάτω πίνακας δίνει το σύνολο των λύσεων για τις διάφορες τιμές του λ.

λ	3	-3	$\neq \pm 3$
x	$\varnothing$	$\mathbb{R}$	$\frac{\lambda}{\lambda-3}$

Κεφάλαιο 2

Διάταξη των πραγματικών αριθμών

2.1 Διάταξη στο $\mathbb{R}$

Στο $\mathbb{R}$ ορίζουμε διάταξη, συμβολικά $a \geq b$ ή $b \leq a$, με ιδιότητες

Ιδιότητες

1. $a \geq a$, $a \in \mathbb{R}$ (ανακλαστική)
2. Αν $a \geq b$ και $b \geq a$, τότε $a = b$ (αντισυμμετρική)
3. Αν $a \geq b$ και $b \geq c$, τότε $a \geq c$ (μεταβατική) (Όμοια για την $>$)

   Επίσης η διάταξη είναι, εξ ορισμού, συμβατή με τις πράξεις υπό την έννοια ότι ισχύουν οι
4. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ακριβώς ένα από τα $x < 0$ ή $x = 0$ ή $x > 0$.
5. Αν $a \geq b$, τότε $a + x \geq b + x$ για κάθε x (όμοια για $>$)
6. Αν $x \geq 0$, τότε $-x \leq 0$
7. Αν $x \geq 0$, $y \geq 0$, τότε $xy \geq 0$

Όλες οι υπόλοιπες ιδιότητες της διάταξης αποδεικνύονται από τις παραπάνω. Ας δούμε μερικές από αυτές.

Παράδειγμα 2.1 Ισχύει $x \geq y$ εάν και μόνον εάν $x - y \geq 0$

Απόδειξη Από τις ιδιότητες της διάταξης έχουμε τις συνεπαγωγές

$x \geq y \Rightarrow x + (-y) \geq y + (-y) \Rightarrow x - y \geq 0.$

Αντίστροφα, $x - y \geq 0 \Rightarrow x - y + y \geq 0 + y \Rightarrow x \geq y$.

□

Παράδειγμα 2.2 Αν $a \geq x$, $b \geq y$ τότε $a + b \geq x + y$, και όμοια αν η ανισότητα ήταν η $\leq$.

Απόδειξη Αν $a \leq x$, από την ιδιότητα 5 έπεται ότι $a + b \leq b + x$. Όμως $b \leq y$ άρα $b + x \leq y + x$. Έτσι $a + b \leq x + y$

□

Άσκηση 2.1 Δείξτε ότι δεν ισχύει πάντα ότι: εάν $a \leq x$ και $b \leq y$ τότε $a - b \leq x - y$

Παράδειγμα 2.3 Αν $a \geq b$, $c \geq 0$ τότε $ac \geq bc$.
Αν $a \leq b$, $c \geq 0$ τότε $ac \leq bc$

Απόδειξη Από το προηγούμενο ισχύει $a - b \geq 0$ άρα $(a - b)c \geq 0$, οπότε $ac \geq bc$. Όμοια η δεύτερη.

□

Παράδειγμα 2.4 Αν $x \leq 0$, $y \leq 0$ τότε $xy \geq 0$ ενώ αν $x \geq 0$, $y \leq 0$ τότε $xy \leq 0$.

Απόδειξη Από την $x \leq 0$ έπεται $-x \geq 0$, και από την $y \leq 0$ έπεται $-y \geq 0$. Άρα $xy = (-x)(-y) \geq 0$. Όμοια η δεύτερη περίπτωση.

□

Συμπεράσματα. Τα παραπάνω συνοψίζονται στα ακόλουθα:

Ισχύει $xy \geq 0$ αν και μόνον αν οι x, y είναι ομόσημοι, ενώ ισχύει $xy \leq 0$ αν και μόνον αν οι x, y είναι ετερόσημοι. Επίσης ισχύει $xy > 0$ αν και μόνον αν x, y ομόσημοι και διαφορετικοί από το 0, και ανάλογα στην περίπτωση $xy < 0$.

Ειδικά, $x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $x^2 > 0$ αν $x \neq 0$. Για παράδειγμα $1 > 0$ καθώς $1 = 1^2 > 0$. Επίσης, αν ξέρουμε ότι κάποιο a ικανοποιεί $a^2 \leq 0$ τότε συμπεραίνουμε ότι $a = 0$. Πραγματικά, αν $a \neq 0$ θα είχαμε $a^2 \leq 0 < a^2$ που οδηγεί στο άτοπο $a^2 \leq 0 < a^2$. Γενικότερα αν $a^2 + b^2 \leq 0$ συμπεραίνουμε $a = b = 0$ διότι έχουμε $a^2 \leq a^2 + b^2 \leq 0$,οπότε $a = 0$ και όμοια $b = 0$.

Άλλο συμπέρασμα που βγαίνει από τα παραπάνω είναι ότι ισχύει $x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 0$ (διότι $x \cdot \frac{1}{x} = 1 > 0$ άρα x, $\frac{1}{x}$ ομόσημοι).

Και ένα ακόμα: Αν $x > y > 0$ τότε $\frac{1}{y} > \frac{1}{x} > 0$ (άσκηση)

Παράδειγμα 2.5 Αν a, b, $c > 0$ τότε ισχύει $\dfrac{a+c}{b+c} > \dfrac{a}{b}$ εάν και μόνο εάν $b > a$.

Απόδειξη Έχουμε $\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b} \Leftrightarrow (a + c)b > (b + c)a \Leftrightarrow ab + bc > ab + ac \Leftrightarrow bc >$

$ac \Leftrightarrow b > a$.

□

Παράδειγμα 2.6 Αν x, $y > 0$ τότε

1. $x \leq y \Leftrightarrow x^n \leq y^n$
2. $x \leq y \Leftrightarrow y^{-n} \leq x^{-n} (n \in \mathbb{N})$

Απόδειξη 1. $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-1}y + \cdots xy^{n-2} + y^{n-1})$

Αλλά $x^{n-1} + x^{n-1}y + \cdots + y^{n-1} > 0$, και συνεπώς τα $x^n - y^n$ και $x - y$ είναι ομόσημα.

2. $y^{-n} \leq x^{-n} \Leftrightarrow (y^{-n})^n \leq (x^{-n})^n \Leftrightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow x \leq y$.

□

Παράδειγμα 2.7 Να συγκριθούν ως προς το μέγεθος οι αριθμοί $2^{504} - 2^{503} - 2^{501}$ και $3^{300} + 3^{301}$.

Λύση Έχουμε $2^{504} - 2^{503} - 2^{502} = 2^{502}(2^2 - 2 - 1) = 2^{502}$ και $3^{300} + 3^{301} = 3^{300}(3+1) = 4 \cdot 3^{300}$, οπότε έχουμε να συγκρίνουμε τους 2^{502} και $4 \cdot 3^{300}$. Απλοποιώντας ένα 4 στους δύο όρους έχουμε να συγκρίνουμε τους 2^{500} και 3^{300}. Είναι

$2^{500} = (2^5)^{100} = 32^{100} > 27^{100} = (3^3)^{100} = 3^{300}$.

Συνοψίζοντας, ισχύει $2^{504} - 2^{503} - 2^{501} > 3^{300} + 3^{301}$.

Παράδειγμα 2.8 Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 \geq \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$.

Απόδειξη Ένας τρόπος είναι να παρατηρήσουμε $\frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$, οπότε $1 - \frac{1}{2n} > 1 - \frac{1}{n}$ και άρα $\frac{2n-1}{2n} > \frac{n-1}{n}$. Υψώνοντας στο τετράγωνο έπεται το ζητούμενο. Αλλιώς, αφού $n \neq 0$, έχουμε

$\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 \geq \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \Leftrightarrow (2n-1)^2 n^2 \geq (n-1)^2 (2n)^2 \Leftrightarrow (2n-1)^2 \geq 4(n-1)^2 \Leftrightarrow 4n^2 - 4n + 1 \geq 4n^2 - 8n + 4 \Leftrightarrow 8n - 4n \geq 4 - 1 \Leftrightarrow 4n \geq 3$, που ισχύει αφού $n \geq 1$.

□

Παράδειγμα 2.9 Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει

$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$

Απόδειξη Παρατηρούμε ότι

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{n+1} & \geq & \frac{1}{2n} \\ & \vdots & \\ \frac{1}{n+n} & \geq & \frac{1}{2n} \end{array}$$

Προσθέτουμε τώρα κατά μέλη, και έχουμε το ζητούμενο.

□

Παράδειγμα 2.10 Αν $x > 0$ τότε

1. $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ με ισότητα αν και μόνο αν $x = 1$

2. $1 + x + x^2 + \cdots + x^{2n} \geq (2n+1)x^n$

Απόδειξη 1. Αφού $x > 0$, ισχύει $x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$, που ισχύει.

Επίσης, για $x = 1$ έχουμε ισότητα διότι $1 + \frac{1}{1} = 2$. Αντίστροφα, αν $x + \frac{1}{x} = 2$ τότε $(x-1)^2 = 0$ άρα $x = 1$

2. Η προς απόδειξη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n \geq 2n + 1$

Από την 1. έχουμε τις εξής $n+1$ ανισότητες:

$$\begin{array}{rcl} 1 & \geq & 1 \\ \frac{1}{x} + x & \geq & 2 \\ \frac{1}{x^2} + x^2 & \geq & 2 \\ & \vdots & \\ \frac{1}{x^n} + x^n & \geq & 2 \end{array}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε το ζητούμενο.

□

2.2 Ανισώσεις

Υπενθυμίζουμε το συμβολισμό για τα διαστήματα δίνοντας ορισμένα παραδείγματα:

$$\begin{array}{rcl} (1,\, 3] & = & \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \leq 3\} \\ (-\infty,\, 4) & = & \{x \in \mathbb{R} | x < 4\} \\ (-\infty,\, +\infty) & = & \mathbb{R} \\ (5,\, +\infty) & = & \{x | x > 5\} \end{array}$$

Τα διαστήματα, εφόσον είναι σύνολα, έχουν και αυτά ενώσεις και τομές. Για παράδειγμα ισχύει

$(1,\, 4] \cap (3,\, 5) = (3,\, 4]$

$(1,\, 4) \cup (3,\, 5] = (1,\, 5]$

Το παρακάτω παράδειγμα είναι χαρακτηριστικό για το πώς επιλύονται ανισώσεις.

Παράδειγμα 2.11 Να επιλυθεί η ανίσωση $5x - 7 > 8x + 20$

Λύση Έχουμε τις ισοδυναμίες

$5x - 7 > 8x + 20$

$\Leftrightarrow 5x - 8x > 20 + 7$

$\Leftrightarrow -3x > 27$

$\Leftrightarrow 3x < -27$

$\Leftrightarrow x < -9$. Άρα το σύνολο των λύσεων είναι το $(\infty,\, -9)$.

Γενικά για την $ax + b > 0$ ισχύουν τα εξής:

- Εάν $a > 0$, έχει λύσεις τα $x > -\frac{b}{a}$, δηλαδή το σύνολο των λύσεων είναι το $\left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$
- Εάν $a = 0$ και α) $b > 0$, τότε η ανίσωση ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ αν

  β) $b \leq 0$, τότε δεν ισχύει για κανένα x.
- Εάν $a < 0$ έχει λύσεις τα $x < -\dfrac{b}{a}$, δηλαδή το σύνολο των λύσεων είναι το $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$

Για την ανίσωση $ax + b \geq 0$ ισχύουν:

- Εάν $a > 0$, έχει λύσεις τα $x \geq -\frac{b}{a}$, δηλαδή το σύνολο των λύσεων είναι το $\left[-\frac{b}{a}, \infty\right)$
- Εάν $a = 0$ και α) $b \geq 0$, η ανίσωση ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ενώ εάν

  β) $b < 0$, η ανίσωση δεν ισχύει για κανένα x.
- Εάν $a < 0$, έχει λύσεις τα $x \leq -\frac{b}{a}$, δηλαδή το σύνολο των λύσεων είναι το $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$

Παρόμοια ισχύουν για τις $ax + b < 0$ και $ax + b \leq 0$.

Παράδειγμα 2.12 Να επιλυθεί η ανίσωση $(1 - \mu)x + 2 > 3(x + 4)$.

Λύση Η δοθείσα ισοδυναμεί με την $-(2 + \mu)x > 10$, ή $(2 + \mu)x < -10$.

Αν $2 + \mu > 0$, δηλαδή $\mu > -2$, η λύση είναι $x < -\frac{10}{\mu+2}$.

Αν $2 + \mu < 0$, δηλαδή $\mu < -2$, η λύση είναι $x > -\frac{10}{\mu+2}$.

Αν $\mu = -2$, η ανίσωση γίνεται $0x < -10$, η οποία δε ισχύει για κανένα x

Συνοπτικά

μ	$\mu < -2$	$\mu = -2$	$-2 < \mu$
x	$\left(-\frac{10}{\mu+2}, +\infty\right)$	$\varnothing$	$\left(-\infty, -\frac{10}{\mu+2}\right)$

Παράδειγμα 2.13 Πού συναληθεύουν οι ανισώσεις

$\frac{5x-8}{3} \leq 3$ και $2(3x - 1) < 3(4x + 7)$;

Λύση Η πρώτη είναι ισοδύναμη με την $5x - 8 \leq 9$ ή $5x \leq 17$ ή $x \leq \frac{17}{5}$. Δηλαδή αληθεύει στο $\left(-\infty, \frac{17}{5}\right]$.

Η δεύτερη γράφεται $6x - 2 < 12x + 21$ ή $-6x < 23$ ή $x > -\frac{23}{6}$. Δηλαδή αληθεύει στο $\left(-\frac{23}{6}, +\infty\right)$

Άρα οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν στο σύνολο

$$\left(-\infty, \frac{17}{5}\right] \cap \left(-\frac{23}{6}, +\infty\right) = \left(-\frac{23}{6}, \frac{17}{5}\right]$$

Παράδειγμα 2.14 Πού συναληθεύουν οι ανισώσεις $(x-1)(x+1)(x+3) > 0$ και $\frac{(x-1)(x+2)}{x-4} > 0$;

Λύση Η πρώτη αληθεύει για $x \in (-3,\,-1) \cup (1,\,+\infty)$.

Για τη δεύτερη περιοριζόμαστε στα x με $x \neq 4$. Κάνοντας χρήση της ισοδυναμίας
$\dfrac{A}{B} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{A}{B} \cdot B^2 > 0 \Leftrightarrow AB > 0$
παρατηρούμε ότι η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα ως $(x-1)(x+2)(x-4) > 0$. Εύκολα βλέπουμε ότι αληθεύει για $x \in (-2,\,1) \cup (4,\,+\infty)$.

Οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν στο $[(-3,\,-1) \cup (1,\,+\infty)] \cap [(-2,\,1) \cup (4,\,+\infty)] = (-2,\,-1) \cup (4,\,+\infty)$

2.3 Απόλυτη Τιμή

Για $x \in \mathbb{R}$ η απόλυτη τιμή ορίζεται ως εξής:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{αν} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{αν} \quad x < 0 \end{cases}$$

π.χ. $|-3| = 3 = |3|$

Ιδιότητες των απολύτων τιμών

1. $|x| \geq 0$
2. $-|x| \leq x \leq |x|$
3. $|x| = |-x|$
4. $|x-y| = |y-x|$
5. $|xy| = |x|\,|y|$
6. Για $c > 0$ ισχύει $(|x| < c) \Leftrightarrow (-c < x < c)$ και $(|x| \leq c) \Leftrightarrow (-c \leq x \leq c)$

Απόδειξη Οι πρώτες τέσσερις είναι άμεσες. Για την 5. διακρίνουμε περιπτώσεις:

1. $x \geq 0,\, y \geq 0$. Τότε $xy \geq 0$, άρα $|xy| = xy$ και $|x|\,|y| = xy$. Οπότε, σε αυτήν την περίπτωση, ισχύει η $|xy| = |x||y|$.

2. $x \geq 0,\, y < 0$.

   Έχουμε $xy \leq 0$, άρα $|xy| = -xy$ και $|x|\,|y| = x(-y)$, οπότε πάλι ισχύει η αποδεικτέα.

   Όμοια εξετάζονται οι περιπτώσεις

3. $x < 0,\, y \geq 0$

4. $x < 0$, $y < 0$

   Για την απόδειξη της 6., έστω ότι ισχύει $-c < x < c$. Η αριστερή ανισότητα γράφεται $-x < c$. Δηλαδή έχουμε $x < c$ και συγχρόνως $-x < c$. Άρα το $|x|$, που είναι ίσο με ένα από τα $\pm x$, ικανοποιεί $|x| < c$. Όμοια το αντίστροφο.

□

Εξισώσεις και ανισώσεις με απόλυτα

Η επίλυση εξισώσεων της μορφής $|x| = a$ και ανισώσεων της μορφής $|x| < a$ ή της $|x| \leq a$ είναι απλή. Η απάντηση εξαρτάται από το πρόσημο του a. Συγκεκριμένα, εύκολα διαπιστώνουμε ότι

Αν $a > 0$ τότε η εξίσωση $|x| = a$ έχει δύο λύσεις, τις $x = \pm a$.

Αν $a = 0$ η λύση της $|x| = 0$ είναι $x = 0$ ενώ

αν $a < 0$ η $|x| = a$ δεν έχει λύση (διότι το αριστερό μέλος είναι πάντα ≥ 0).

Για $a > 0$ η λύση της $|x| < a$ είναι $-a < x < a$

Με άλλα λόγια έχουμε

Αν $a > 0$ τότε $(|x| < a) \Leftrightarrow (-a < x < a) \Leftrightarrow (x \in (-a, a))$

και $(|x| \leq a) \Leftrightarrow (-a \leq x \leq a) \Leftrightarrow (x \in [-a, a])$

Για $a < 0$ οι παραπάνω ανισώσεις είναι αδύνατες.

Όμοια, για $b > 0$ έχουμε

$$|x - a| < b \Leftrightarrow -b < x - a < b$$

$$\Leftrightarrow \quad a - b < x < a + b$$

$$\Leftrightarrow x \in (a - b,\, a + b)$$

Τριγωνική Ανισότητα. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει

$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

Απόδειξη Ισχύει $-|x| \leq x \leq |x|$ και $-|y| \leq y \leq |y|$. Προσθέτοντας κατά μέλη έπεται ότι

$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$, άρα $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Επίσης $|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$

και $|x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |-y| = |x + y| + |y|$,

άρα $|x| - |y| \leq |x + y|$.

Όμοια $|y| - |x| \leq |y + x|$. Οι δύο μαζί δίνουν $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

□

2.4 Ανισότητες

Η απλούστερη ανισότητα είναι η $x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Παρά την απλότητά της είναι σημαντική ανισότητα με χρήση της οποίας αποδεικνύεται μία μεγάλη οικογένεια άλλων ανισοτήτων. Στις αποδείξεις αυτές είτε φέρνουμε το αποδεικτέο στην μορφή x^2 για κατάλληλο x είτε, γενικότερα, στη μορφή $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$ (άθροισμα τετραγώνων). Παρακάτω σταχυολογούμε μερικές βασικές ανισότητες ενώ αργότερα, σε χωριστό κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε συστηματικότερα με το θέμα.

1. $a^2 + b^2 \geq 2ab$ με ισότητα αν και μόνον αν $a = b$

   Απόδειξη Η ανισότητα γράφεται σε ισοδύναμη μορφή ως $(a-b)^2 \geq 0$ η οποία είναι προφανής. Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $a - b = 0$,δηλαδή $a = b$

   □

2. $a^2 + ab + b^2 \geq 0$

   Απόδειξη Θα δώσουμε διάφορες αποδείξεις για να δούμε την ποικιλία των μεθόδων της θεωρίας.

   α΄ τρόπος

   Η παράσταση γράφεται ως άθροισμα τετραγώνων, άρα είναι θετική:
   $a^2 + ab + b^2 = \frac{3}{4}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$.

   β΄ τρόπος Υπάρχει και άλλος τρόπος να γραφεί ως άθροισμα τετραγώνων η παράσταση. Συγκεκριμένα, $a^2 + ab + b^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}(a+b)^2 \geq 0$

   γ΄ τρόπος Αν $a = b$ το αποδεικτέο είναι άμεσο οπότε μπορούμε χωρίς βλάβη στην γενικότητα να υποθέσουμε ότι $a > b$. Τότε είναι και $a^3 > b^3$ οπότε $a^2 + ab + b^2 = \frac{a^3 - b^3}{a - b} > 0$ ως πηλίκο θετικών.

   δ΄ τρόπος Αν $ab \geq 0$ το αποδεικτέο είναι άμεσο ως άθροισμα τριών θετικών, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $ab < 0$. Τότε ισχύει $ab > 2ab$, οπότε $a^2 + ab + b^2 > a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \geq 0$.

   ε΄ τρόπος Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί την θεωρία της διακρίνουσας, η οποία είναι γνωστή από το Λύκειο και επαναλαμβάνεται παρακάτω στο Κεφάλαιο 4.

   Παρατηρούμε ότι το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ έχει αρνητική διακρίνουσα, $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -2 < 0$, και θετικό συντελεστή του x^2. Άρα ισχύει $x^2 + x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε για $b \neq 0$ ισχύει $(\frac{a}{b})^2 + (\frac{a}{b}) + 1 \geq 0$. Πολλαπλασιάζοντας επί b^2 έπεται το ζητούμενο. Αν $b = 0$ το αποδεικτέο είναι προφανές.

   □

3. Ισχύει $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ με ισότητα αν και μόνον αν $a = b = c$.

   Απόδειξη Προσθέτοντας κατά μέλη τις $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$ και $c^2 + a^2 \geq 2ca$, οι οποίες αποδείχθηκαν στο 1., έπεται $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$. Η τελευταία ισοδυναμεί με την αποδεικτέα. Θα ισχύει η ισότητα αν και μόνον αν ισχύουν και οι τρεις ισότητες $a^2 + b^2 = 2ab$, $b^2 + c^2 = 2bc$ και $c^2 + a^2 = 2ca$ που συμβαίνει όταν $a = b$, $b = c$ και $c = a$, αντίστοιχα. Άρα όταν $a = b = c$.

□

4. $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c)$

   Απόδειξη Η πρώτη ανισότητα έπεται αμέσως από την 3. με a^2, b^2, c^2 στην θέση των a, b, c.

   Για την δεύτερη θέτουμε $p = ab$, $q = bc$, $r = ca$ οπότε, από την $p^2 + q^2 + r^2 \geq pq + qr + rp$, έχουμε το ζητούμενο.

   □

5. Αν $a + b + c \geq 0$ τότε $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$

   Απόδειξη $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

   □

2.4.1 Ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού μέσου

Αν a_1, a_2, ... a_n πραγματικοί αριθμοί τότε ο αριθμητικός τους μέσος ορίζεται ως η ποσότητα $A_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$. Στην περίπτωση που είναι θετικοί, ο γεωμετρικός τους μέσος ορίζεται ως $G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ και στην περίπτωση που είναι μη μηδενικοί, ο αρμονικός τους μέσος ορίζεται ως $H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$. Σε επόμενο κεφάλαιο θα αποδείξουμε μία από τις σημαντικότερες ανισότητες σύμφωνα με την οποία ισχύει

$$A_n \geq G_n \geq H_n$$

Προς το παρόν θα αρκεστούμε μόνο στις ειδικές περιπτώσεις όπου $n = 2$ ή $n = 3$. Με άλλα λόγια θα αποδείξουμε

Αν $a, b, c > 0$ τότε ισχύει

6. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ και

7. $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$

Απόδειξη Αν στην 1. θέσουμε $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ στην θέση των a, b , παίρνουμε αμέσως την $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Αν εφαρμόσουμε αυτήν στους αριθμούς $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ παίρνουμε $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{ab}}$, που ισοδυναμεί με την αποδεικτέα. Για την αντίστοιχη ανισότητα με τρεις όρους, παίρνουμε

$\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{c}$ στην ανισότητα 5. θέση των a, b, c , οπότε έχουμε $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$, που ισοδυναμεί με την αποδεικτέα. Για την δεξιά ανισότητα, εφαρμόζουμε αυτήν που μόλις αποδείξαμε στους αριθμούς $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$. Έχουμε τότε $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$, που ισοδυναμεί με την αποδεικτέα.

□

Παράδειγμα 2.15 Αν a, b, $c > 0$ τότε $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$.

Απόδειξη Από την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ έχουμε $a+b+c \geq \sqrt[3]{abc}$ και, επίσης $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη, έπεται το ζητούμενο. Μία λίγο καλύτερη απόδειξη είναι να εφαρμόσουμε την ανισότητα του ΑΜ-ΓΜ για τρεις μεταβλητές, αλλά αγνοώντας τον μεσαίο όρο G. Έχουμε τότε $\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ που ισοδυναμεί με την ζητούμενη αν μεταφέρουμε το $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ στο αριστερό μέλος και την σταθερά 3 στο δεξί.

□

Παράδειγμα 2.16

Αν a, b, $c \geq 0$ τότε $(a^2b+b^2c+c^2a)(a^2c+b^2a+c^2b) \geq 9a^2b^2c^2$

Απόδειξη Από την ανισότητα του ΑΜ-ΓΜ σε κάθε παρένθεση χωριστά, βλέπουμε ότι το αριστερό μέλος είναι $\geq 3\sqrt[3]{a^2b \cdot b^2c \cdot c^2a} \cdot 3\sqrt[3]{a^2c \cdot b^2a \cdot c^2b} = 9a^2b^2c^2$

□

Οι προηγούμενες ανισότητες είναι συμμετρικές με την έννοια ότι δεν αλλάζουν μορφή αν εναλλάξουμε τα γράμματα a, b, c στις παραστάσεις. Ακολουθεί μία μη συμμετρική.

Παράδειγμα 2.17

Αν a, b, $c \geq 0$ τότε $a^3+b^3+c^3 \geq a^2b+b^2c+c^2a$

Απόδειξη Από την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ έχουμε $a^3+a^3+b^3 \geq 3\sqrt[3]{a^3a^3b^3} = 3a^2b$. Όμοια $b^3+b^3+c^3 \geq 3b^2c$ και $c^3+c^3+a^3 \geq 3c^2a$. Με πρόσθεση κατά μέλη έπεται το ζητούμενο, αφού απλοποιήσουμε ένα κοινό παράγοντα 3.

□

Παράδειγμα 2.18 (Ανισότητα Nesbitt). Αν a, b, $c > 0$ τότε

$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Απόδειξη Θέτουμε $b+c=y$, $c+a=z$ και $a+b=x$, οπότε $a+b+c=\frac{x+y+z}{2}$. Έπεται ότι

$a=\frac{x+y+z}{2}-y=\frac{x+z-y}{2}$ και όμοια τα υπόλοιπα. Έχουμε τώρα τις ισοδυναμίες

$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$
$\Leftrightarrow \frac{x+z-y}{2y} + \frac{x-z+y}{2z} + \frac{y+z-x}{2x} \geq \frac{3}{2}$
$\Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1 \geq 3$
$\Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} \geq 6$

Όμως η τελευταία ισχύει όπως προκύπτει από πρόσθεση κατά μέλη των ανισοτήτων $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, $\frac{z}{y} + \frac{y}{z} \geq 2$, $\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2$

□

2.4.2 Ανισότητα Cauchy-Schwarz

Οι παρακάτω δύο ανισότητες είναι ειδικές περιπτώσεις μιας από τις σημαντικότερες ανισότητες των πραγματικών αριθμών η οποία ονομάζεται ανισότητα Cauchy-Schwarz. Την γενική περίπτωση θα την μελετήσουμε διεξοδικά σε επόμενο κεφάλαιο.

1. $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

2. $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$

   Απόδειξη Έχουμε $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 = a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 - a^2x^2 - 2abxy - b^2y^2 = (ay - bx)^2 \geq 0$, από όπου έπεται η πρώτη. Για την δεύτερη σκεπτόμαστε όμοια από την

   $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 = a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2 + b^2y^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2 - a^2x^2 - b^2y^2 - c^2z^2 - 2abxy - 2acxz - 2bcyz$

   $= (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 \geq 0$

□

Άμεση είναι η

Παράδειγμα 2.19 Αν a, b, $c > 0$ τότε
$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$

Απόδειξη Εφαρμόζουμε την 2. σύμφωνα με την οποία έχουμε
$(a+b+c)^2 = (1 \cdot a+1 \cdot b+1 \cdot c)^2 \leq (1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2) = 3(a^2+b^2+c^2)$

□

Ως πιο ενδιαφέρουσα εφαρμογή θα δούμε μία ανισότητα που αποδείξαμε με άλλο τρόπο λίγο παραπάνω.

Παράδειγμα 2.20 Αν a, b, $c > 0$ τότε $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$.

Απόδειξη Εφαρμόζουμε την 2. στην μορφή $(u^2 + v^2 + w^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ux + vy + wz)^2$ για $u = \sqrt{a}$, $v = \sqrt{b}$, $w = \sqrt{c}$ και $x = \frac{1}{\sqrt{a}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{b}}$, $z = \frac{1}{\sqrt{c}}$.

□

Ως εφαρμογή της προηγούμενης θα δώσουμε νέα απόδειξη της ανισότητας Nesbitt την οποία αποδείξαμε με χρήση της ανισότητας ΑΜ-ΓΜ.

Παράδειγμα 2.21 (Ανισότητα Nesbitt). Αν a, b, $c > 0$ τότε
$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Από την προηγούμενη έχουμε
$((a+b)+(b+c)+(c+a))\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq 9$ άρα
$\Leftrightarrow \frac{2(a+b+c)}{a+b} + \frac{2(a+b+c)}{b+c} + \frac{2(a+b+c)}{c+a} \geq 9$
$\Leftrightarrow 2 + \frac{2c}{a+b} + 2 + \frac{2a}{b+c} + 2 + \frac{2b}{c+a} \geq 9$
$\Leftrightarrow 6 + \frac{2c}{a+b} + \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} \geq 9$
$\Leftrightarrow 2\left(\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a}\right) \geq 3$
$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

Παράδειγμα 2.22 Αν a, b, $c > 0$ τότε

1. $(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \leq (a^2 + b^2 + c^2)(a^4 + b^4 + c^4)$

2. $(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \leq (a^2 + b^2 + c^2)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$

Απόδειξη

1. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

   $a^2 \cdot b + b^2 \cdot c + c^2 \cdot a \leq \sqrt{(a^2)^2 + (b^2)^2 + (c^2)^2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + a^2}$

   και όμοια $ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^4 + c^4 + a^4}$,

   τις οποίες τώρα πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη.

2. Όμοια, από τις

   $a^2b + b^2c + c^2a = a(ab) + b(bc) + c(ca) \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2}$
   και

   $ab^2 + bc^2 + ca^2 = b(ab) + c(bc) + a(ca) \leq \sqrt{b^2 + c^2 + a^2}\sqrt{(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2}$

   με πολλαπλασιασμό κατά μέλη.

□

2.4.3 Ανισότητα Bernoulli

Θεώρημα 2.1 *Για $n \in \mathbb{N}$ και $x \geq -1$ ισχύει $(1+x)^n \geq 1 + nx$.*

Απόδειξη

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή: Για $n = 1$ το ζητούμενο είναι προφανές.

Έστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή έστω $(1 + x)^k \geq 1 + kx$.

Τότε έχουμε

$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k(1 + x) \geq (1 + kx)(1 + x) = 1 + kx + x + kx^2 =$
$= 1 + (k + 1)x + kx^2 = 1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x$

□

Παράδειγμα 2.23 (Ειδική περίπτωση του τελευταίου Θεωρήματος του Fermat) Αν a, b, c, n θετικοί φυσικοί αριθμοί με $a^n + b^n = c^n$, τότε $n < c$.

Απόδειξη Έστω ότι $n \geq c$, ισοδύναμα $\frac{n}{c} \geq 1$. Ισχύει $b^n < a^n + b^n = c^n$, ισοδύναμα $b \leq c$. Επίσης, χωρίς βλάβη στην γενικότητα ισχύει $a \leq b$. Άρα $c^n = a^n + b^n \leq 2b^n \leq \left(1 + \frac{n}{c}\right) b^n \leq \left(1 + \frac{n}{b}\right) b^n \leq \left(1 + \frac{1}{b}\right)^n b^n = (b + 1)^n$

Δηλαδή ισχύει $b^n < c^n < (b + 1)^n$, οπότε $b < c < b + 1$. Αυτό είναι άτοπο γιατί οι $b, b + 1$ είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί, οπότε δεν υπάρχει άλλος φυσικός μεταξύ τους.

□

Κεφάλαιο 3

Ρίζες, Ρητοί και Άρρητοι Αριθμοί

3.1 Ρίζες

Θα θεωρούμε γνωστό το εξής, του οποίου η απόδειξη ξεφεύγει από τους στόχους των σημειώσεων:

Για κάθε $a \geq 0$ υπάρχει ένα και μοναδικό x θετικό τέτοιο ώστε $x^2 = a$

Τον μοναδικό αυτό θετικό αριθμό τον συμβολίζουμε $\sqrt{a}$. Με άλλα λόγια είναι, εξ' ορισμού, $\sqrt{a} \geq 0$ και $(\sqrt{a})^2 = a$.

Π.χ. $\sqrt{9} = 3$ και $\sqrt{2}$ είναι κάποιος αριθμός μεταξύ $1,414$ και $1,415$.

Παρατηρούμε ότι $(-\sqrt{a})^2 = a$ (δηλαδή υπάρχει ένας αρνητικός αριθμός, ο $-\sqrt{a}$, του οποίου το τετράγωνο του είναι a).

Ας τονιστεί ότι ισχύει το

αν $b \in \mathbb{R}$, τότε $\sqrt{b^2} = |b|$

π.χ. ισχύει

$$\sqrt{25a^2 - 30ab + 9b^2} = \sqrt{(5a - 3b)^2} = |5a - 3b|$$

Γενικότερα, θεωρούμε γνωστό ότι

Για κάθε $a \geq 0$ και $n \in \mathbb{N}^*$, υπάρχει ένας και μοναδικός $x \geq 0$ με $x^n = a$

Ο μοναδικός αυτός θετικός x συμβολίζεται $\sqrt[n]{a}$. Ισχύει, λοιπόν, $\sqrt[n]{a} \geq 0$ και $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Αν n περιττός, ισχύει κάτι αντίστοιχο και για $a < 0$. Συγκεκριμένα, αν $n = 2k + 1$, $a < 0$ τότε υπάρχει ένα και μοναδικό x (το οποίο είναι < 0) με $x^n = a$. Π.χ. το μοναδικό x με $x^3 = -8$ είναι το $x = -2$. Για λόγους που θα φανούν αργότερα, μας είναι χρήσιμο να επεκτείνουμε την έννοια του συμβόλου $\sqrt[n]{a}$ (όταν n περιττός) και στην περίπτωση όπου $a < 0$. Για παράδειγμα, λόγω της $(-2)^3 = -8$ θα γράφουμε $\sqrt[3]{-8} = -2$. Όμοια $\sqrt[3]{-27} = -3$, $\sqrt[5]{-32} = -2$ και λοιπά.

Θεώρημα 3.1 *Αν $a, b \geq 0$, και $m, n \in \mathbb{N}^*$, τότε*

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ *και, για* $b \neq 0$, $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
2. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mk]{a^{nk}}$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}^*$
3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
4. *Αν* $a \geq b \geq 0$ *τότε* $\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{b} \geq 0$

Απόδειξη

1. Έστω x, y οι μοναδικοί θετικοί αριθμοί με $x^n = a$, $y^n = b$. Τότε $(x\,y)^n = x^n y^n = ab$ οπότε, εξ ορισμού, αφού $xy > 0$, ισχύει

$xy = \sqrt[n]{ab}$. Δηλαδή $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

Επίσης $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}\cdot b} = \sqrt[n]{a}$ και λοιπά.

2. Έστω x ο μοναδικός θετικός αριθμός με $x^m = a^n$. Τότε $x^{mk} = a^{nk}$, οπότε $x = \sqrt[mk]{a^{nk}}$

3. Έστω x ο μοναδικός θετικός αριθμός με $x^n = \sqrt[m]{a}$. Τότε $(x^n)^m = (\sqrt[m]{a})^m = a$. Όμως, αφού $x^n = \sqrt[m]{a}$, έχουμε $x = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$.

4. Άμεση από την αντίστοιχη ανισότητα για δυνάμεις.

□

Παράδειγμα 3.1 Να αποδειχθεί ότι

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}} < 3 \text{ και } \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}} < 2\ .$$

Απόδειξη Χρησιμοποιώντας την $\sqrt{6} < \sqrt{9} = 3$ έχουμε διαδοχικά

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}} < \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{9}}}} = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+3}}}$$

$$= \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{9}}} = \sqrt{6+\sqrt{6+3}} = \sqrt{6+3} = 3.$$

Η δεύτερη αποδεικνύεται όμοια με χρήση της $\sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{8} = 2$.

□

Ορισμός.

Αν $a \geq 0$, k, $l \in \mathbb{Z}$ και $l > 0$ τότε θέτουμε $a^{\frac{k}{l}} = \sqrt[l]{a^k}$.

Σχολιάζουμε ότι ο ορισμός του $a^{\frac{k}{l}}$ δόθηκε μόνο για μη αρνητικά a. Θα δούμε με παράδειγμα ότι, στην περίπτωση που ορίζαμε το $a^{\frac{k}{l}}$ με τον ίδιο τρόπο για $a < 0$, θα μπορούσε να πάρει διαφορετικές τιμές ανάλογα με τη συγκεκριμένη κλασματική παράσταση του εκθέτη. Για παράδειγμα αφού $\sqrt[3]{(-1)^5} = \sqrt[3]{-1} = -1$ ενώ $\sqrt[6]{(-1)^{10}} = \sqrt[6]{1} = 1$, θα είχαμε $(-1)^{\frac{3}{5}} \neq (-1)^{\frac{6}{10}}$, παρόλο που $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$. Για να αποφύγουμε δυσκολίες αυτού του τύπου περιοριζόμαστε μόνο στα $a \geq 0$.

Θεώρημα 3.2 *Για* $a > 0$, n, $l \in \mathbb{N}^*$, m, $k \in \mathbb{Z}$ *ισχύει* $a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{nk}{nl}}$, $a^{\frac{k}{l}}a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{k}{l}+\frac{m}{n}}$ *και* $(a^{\frac{k}{l}})^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{km}{ln}}$

Απόδειξη Έχουμε $a^{\frac{kn}{nl}} = \sqrt[nl]{a^{kn}} = \sqrt[l]{\sqrt[n]{(a^k)^n}} = \sqrt[l]{a^k} = a^{\frac{k}{l}}$ και
$a^{\frac{k}{l}}\, a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{nk}{nl}}\, a^{\frac{ml}{nl}} = \sqrt[nl]{a^{nk}}\, \sqrt[nl]{a^{ml}} = \sqrt[nl]{a^{nk}\, a^{ml}} = \sqrt[nl]{a^{nk+ml}} = a^{\frac{nk+ml}{nl}} = a^{\frac{k}{l}+\frac{m}{n}}$.
Με παρόμοιο τρόπο γίνεται και η απόδειξη της $(a^{\frac{k}{l}})^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{km}{ln}}$

□

3.2 Άρρητοι αριθμοί

Οι ρητοί αριθμοί χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι το δεκαδικό τους ανάπτυγμα είτε περατώνεται είτε είναι περιοδικό από κάποιο σημείο και πέρα. Για παράδειγμα $\frac{3}{8} = 0,375$ (περατώνεται) και $\frac{419}{990} = 0,4232323...$ (περιοδικός από το δεύτερο δεκαδικό ψηφίο και πέρα). Αντίστροφα, αποδεικνύεται αλλά η απόδειξη θα γίνει σε άλλο κεφάλαιο, ότι οι αριθμοί που είτε περατώνονται είτε είναι περιοδικοί από κάποιο σημείο και πέρα, είναι ρητοί. Οι υπόλοιποι είναι άρρητοι.

Παράδειγμα 3.2 Ο αριθμός $0,101001000100001...$ (ένα μηδενικό παραπάνω κάθε φορά) είναι άρρητος.

Γνωστοί άρρητοι είναι οι $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $log2$, π, e και πολλοί άλλοι. Εν γένει είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι κάποιος συγκεκριμένος αριθμός είναι ρητός ή άρρητος αλλά στα παρακάτω θα ασχοληθούμε με μερικούς από τους απλούστερους γνωστούς άρρητους, όπως είναι οι δύο πρώτοι.

Θα χρησιμοποιήσουμε χωρίς απόδειξη την εξής ιδιότητα των φυσικών αριθμών:

Κάθε φυσικός αριθμός n γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων παραγόντων, $n = p_1^{a_1}\, p_2^{a_2} \dots p_i^{a_i}$

Π.χ. $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Θα δούμε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός. Γενικότερα ο $\sqrt{n}$ είναι άρρητος, εκτός αν ο n είναι τέλειο τετράγωνο ($n = m^2$, m ακέραιος).

Θεώρημα 3.3 *Ο $\sqrt{n}$ είναι ρητός αν και μόνο αν ο n είναι της μορφής $n = m^2$, $m \in \mathbb{N}$ (δηλαδή τέλειο τετράγωνο). Γενικότερα, αν $p \in \mathbb{N}^*$, τότε ο $\sqrt[p]{n}$ είναι ρητός αν και μόνον αν είναι της μορφής $n = m^p$, $m \in \mathbb{N}$ (δηλαδή είναι τέλεια p δύναμη).*

Απόδειξη Έστω ότι ο $\sqrt{n}$ είναι ρητός, δηλαδή γράφεται στη μορφή $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, όπου οι p, q είναι φυσικοί αριθμοί. Τότε ισχύει $nq^2 = p^2$. Αναλύοντας τα n, p, q σε γινόμενα πρώτων παραγόντων παίρνουμε

$(n_1^{a_1} \dots n_s^{a_s})(q_1^{b_1} \dots q_k^{b_k})^2 = (p_1^{c_1} \dots p_l^{c_l})^2$

ή

$n_1^{a_1} \dots n_s^{a_s} q^{2b_1} \dots q_k^{2b_k} = p_1^{2c_1} \dots p_l^{2c_l}$

Λόγω της μοναδικότητας της ανάλυσης σε γινόμενο πρώτων παραγόντων έπεται ότι οι $a_1, \ldots, a_s$ είναι άρτιοι.

Άρα $a_1 = 2d_1, \ldots, a_s = 2d_s$

οπότε $n = n_1^{a_1} \ldots n_s^{a_s} = n_1^{2d_1} \ldots n_s^{2ds} = (n_1^{d_1} \ldots n_s^{d_s})^2 = m^2$

Αντίστροφα αν $n = m^2$ τότε $\sqrt{n} = \sqrt{m^2} = m$, ο οποίος είναι ρητός.

Η γενικότερη περίπτωση αποδεικνύεται όμοια.

□

Παράδειγμα 3.3

1. Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, διότι ο 2 δεν είναι τέλειο τετράγωνο $(1^2 < 2 < 2^2)$.

2. Για τον ίδιο λόγο είναι άρρητοι οι $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{10}, \ldots$. Επίσης είναι άρρητοι οι $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[10]{7}$ και λοιπά.

Παράδειγμα 3.4 3. Λίγο πιο σύνθετο παράδειγμα άρρητου αριθμού είναι ο $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Επίσης, 4. Ο $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ είναι άρρητος.

Απόδειξη

3. **α΄ τρόπος**

Έστω ότι ο $p = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ είναι ρητός. Τότε ο $2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3 = p^2$ θα είναι επίσης ρητός, οπότε το ίδιο θα ισχύει και για τον $\sqrt{6} = \frac{p^2-5}{2}$, το οποίο είναι άτοπο.

β΄ τρόπος

Αν ο $\sqrt{2} + \sqrt{3} = p$ είναι ρητός, τότε θα είναι ρητός και ο $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{1}{p}$. Όμως $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$. Έπεται ότι και ο $2\sqrt{3} = (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2})$ θα είναι ρητός, άρα και ο $\sqrt{3}$, το οποίο είναι άτοπο.

4. Αν ο $p = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ ήταν ρητός, τότε $p^3 = 2 + 3 + 3\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{3}p = 5 + 3\,\sqrt[3]{6}p$, οπότε ο $\sqrt[3]{6} = \frac{p^3-5}{3p}$ θα ήταν ρητός, το οποίο είναι άτοπο.

□

Παράδειγμα 3.5 Ο αριθμός $\sqrt{100!}$ είναι άρρητος.

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο 100! δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Προς τούτο εξετάζουμε τον μεγαλύτερο πρώτο παράγοντα στο γινόμενο $100! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times 98 \times 99 \times 100$, που είναι βέβαια ο 97. Είναι σαφές ότι κανένας άλλος όρος του γινομένου 100! , εκτός από τον ίδιο τον 97, δεν περιέχει τον 97 ως πρώτο παράγοντα. Συνεπώς η ανάλυση του 100! σε πρώτους παράγοντες περιέχει ακριβώς ένα 97, δηλαδή ο 97 είναι υψωμένος σε περιττή δύναμη Έπεται ότι ο 100! δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

□

Παραδείγματα ρητοποίησης παρονομαστών

Πολλές φορές μας είναι χρήσιμο να απαλείφουμε τους άρρητους αριθμούς στους παρονομαστές των κλασμάτων. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε την αριθμητική τιμή του $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{1{,}414213562}$ μέχρι κάποιου δεκαδικού ψηφίου, εκτελώντας την διαίρεση, θα χρειαστεί να κάνουμε επίπονες πράξεις. Αν όμως παρατηρήσουμε ότι $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1{,}414213562}{2}$, η διαίρεση έχει πολύ λιγότερες πράξεις. Θα δώσει εύκολα την απάντηση $0,707106781$. Παρακάτω δίνουμε μερικά παραδείγματα τέτοιων περιπτώσεων.

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και γενικότερα $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ και γενικότερα $\frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$

$\frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ και γενικότερα $\frac{1}{\sqrt{a}+b} = \frac{\sqrt{a}-b}{b^2-a}$

$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$ και γενικότερα $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^2-b^2}$

$\frac{1}{a+\sqrt[3]{b}} = \frac{a^2-a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}}{(a+\sqrt[3]{b})(a^2-a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2})} = \frac{a^2-a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}}{a^3+b}$

3.2.1 Απλοποίηση παραστάσεων με ριζικά

Παράδειγμα 3.6 α. $\sqrt[3]{5+\sqrt{17}}\,\sqrt[3]{5-\sqrt{17}} = \sqrt[3]{(5+\sqrt{17})\,(5-\sqrt{17})} =$
$= \sqrt[3]{25-17} = \sqrt[3]{8} = 2$

β.$\sqrt{16+2\sqrt{55}} = \sqrt{11+5+2\sqrt{11\cdot 5}} = \sqrt{(\sqrt{11})^2+2\sqrt{11}\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2} =$
$= \sqrt{11}+\sqrt{5}$.

Γενικότερα αν $a^2 > b > 0$, a, $b \in \mathbb{R}$ με $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$, τότε ο $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ γράφεται ως $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ (*). Συγκεκριμένα

$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ (**)

Πράγματι, υψώνοντας στο τετράγωνο έπεται ότι η σχέση $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$ είναι ισοδύναμη με την $a+\sqrt{b} = x+y+2\sqrt{xy}$. Άρα αρκεί να ισχύει $a = x+y$ και $\sqrt{b} = 2\sqrt{xy}$ ή $b = 4xy$. Τότε $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = a^2 - b$ δηλαδή αρκεί να έχουμε $x - y = \sqrt{a^2-b}$ και $x+y = a$, άρα $x = \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}$ και $y = \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}$.

Παρατηρείστε ότι αν, περαιτέρω, a, $b \in \mathbb{Q}$ και το a^2-b είναι τετράγωνο ρητού, τότε τα x, y στην (*) είναι και αυτά ρητοί αριθμοί. Για παράδειγμα το 2. παραπάνω γράφεται $\sqrt{16+2\sqrt{55}} = \sqrt{16+\sqrt{220}}$, που σημαίνει $a = 16$, $b = 220$ άρα $a^2 - b = 256 - 220 = 36 = 6^2$. Έτσι, ο τύπος (**) δίνει $\sqrt{16+2\sqrt{55}} = \sqrt{16+\sqrt{220}} = \sqrt{\frac{16+\sqrt{36}}{2}} + \sqrt{\frac{16-\sqrt{36}}{2}} = \sqrt{11}+\sqrt{5}$, όπως πριν.

Παράδειγμα 3.7 να απλοποιηθεί η παράσταση $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$ **Λύση** Θέτουμε $x = \sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$ που είναι βέβαια της μορφής $x = a - b$.

Από την ταυτότητα $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$ έχουμε $x^3 = a^3 - b^3 - 3abx$, που στην περίπτωσή μας δίνει

$x^3 = (\sqrt{108}+10)-(\sqrt{108}-10)+3\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}x = 20-3x\sqrt[3]{108-100} = 20-6x$

Δηλαδή το x ικανοποιεί την εξίσωση $x^3+6x-20=0$. Παρατηρούμε ότι η $x=2$ ικανοποιεί την εξίσωση καθώς $x^3+6x-20-2^3+20\cdot 2-20=0$. Επίσης παρατηρούμε ότι καμία άλλη τιμή του x δεν την ικανοποιεί διότι για $x>2$ έχουμε $x^3+6x-20>2^3+6\cdot 2-20=0$ και όμοια για $x<2$ έχουμε $x^3+6x-20<2^3+6\cdot 2-20=0$. Συνεπώς η μόνη τιμή που μπορεί να έχει το x είναι 2 , οπότε

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}=2$$

Θεώρημα 3.4 *Αν a, b, x, $y \in \mathbb{Q}$ με $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$ ή $\sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$ και αν $x+\sqrt{y}=a+\sqrt{b}$, τότε $x=a$ και $y=b$.*

Απόδειξη Έστω $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$ (όμοια αν $\sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$). Η υπόθεση δίνει $\sqrt{y}=a-x+\sqrt{b}$ άρα $y=(a-x)^2+b+2(a-x)\sqrt{b}$. Έπεται ότι $a=x$, διότι αλλιώς ο $\sqrt{b}=\frac{y-(a-x)^2-b}{2(a-x)}$ θα ήταν ρητός.

Η αρχική σχέση δίνει τότε $\sqrt{y}=\sqrt{b}$, άρα $y=b$.

□

Πορίσματα

1. Αν m, n φυσικοί αριθμοί, που δεν είναι τέλεια τετράγωνα και $a \in \mathbb{Q}$ με $a+\sqrt{m}=\sqrt{n}$, τότε $a=0$ και $m=n$

2. Αν a, b, x, $y \in \mathbb{Q}$ με $\sqrt{y}$ ή $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$ και αν $x+\sqrt{y}=a+\sqrt{b}$, τότε ισχύει και $x-\sqrt{y}=a-\sqrt{b}$.

Κεφάλαιο 4

Εξισώσεις

4.1 Δευτεροβάθμιες εξισώσεις

Στα προηγούμενα εξετάσαμε την επίλυση πρωτοβάθμιων εξισώσεων. Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την επίλυση δευτεροβάθμιων και τριτοβάθμιων εξισώσεων ενώ σε επόμενα κεφάλαια θα ασχοληθούμε συστηματικότερα με πολυωνυμικές εξισώσεις ανωτέρου βαθμού και τις ιδιότητες που προκύπτουν από την επίλυσή τους.

Δευτεροβάθμιες εξισώσεις είναι οι εξισώσεις της μορφής $ax^2 + bx + c = 0$ όπου $a, b, \in \mathbb{C}$ με $a \neq 0$.

Αρχικά θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση όπου τα a, b, c είναι πραγματικοί αριθμοί και θα επικεντρωθούμε, εκτός αν το δηλώνουμε ρητά, στην εύρεση πραγματικών ριζών.

Έχουμε

$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$

$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

Η παράσταση $D = b^2 - 4ac$ ονομάζεται *διακρίνουσα* του τριωνύμου.

• Αν $D \geq 0$ τότε $D = (\sqrt{D})^2$, άρα το τριώνυμο ισούται με

$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2\right] = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)$

Συμπεραίνουμε ότι έχει δύο διακεκριμένες ρίζες, τις

$\rho_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ και $\rho_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

τις οποίες συχνά γράφουμε συνοπτικά ως $\rho_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Σε αυτή την περίπτωση, όπως δείξαμε παραπάνω, είναι $ax^2 + bx + c = a(x - \rho_1)(x - \rho_2)$.

• Αν $D = 0$ τότε $\rho_1 = \rho_2 = -\frac{b}{2a}$. Σε αυτή την περίπτωση οι δύο ρίζες συμπίπτουν, και λέμε ότι το τριώνυμο έχει διπλή ρίζα ρ. Αν ονομάσουμε ρ την διπλή ρίζα, είναι τότε $ax^2 + bx + c = a(x - \rho)^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

• Αν $D < 0$ τότε
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} \geq -\frac{D}{4a^2} > 0$ άρα η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.
Ειδικότερα αν $D < 0$ τότε ισχύει
α) $ax^2 + bx + c > 0$ για κάθε x, αν $a > 0$ ενώ
β) $ax^2 + bx + c < 0$ για κάθε x, αν $a < 0$.
Συνοψίζουμε: Αν $D = b^2 - 4ac$, τότε

Αν $D > 0$,	δύο ρίζες:	$\rho_1,\ \rho_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ $ax^2 + bx + c = a(x - \rho_1)(x - \rho_2)$
Αν $D = 0$,	μία διπλή ρίζα:	$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{b}{2a}$ $ax^2 + bx + c = a(x - \rho_1)^2$
Αν $D < 0$	δεν υπάρχουν πραγματικές ρίζες	

Παράδειγμα 4.1 Να επιλυθεί η εξίσωση $2(x^2 - 4)^2 - 3(x^2 - 4) - 35 = 0$.

Λύση Θέτουμε $y = x^2 - 4$, οπότε προκύπτει η εξίσωση $2y^2 - 3y - 35 = 0$ με ρίζες $y = 5$, $y = -\frac{7}{2}$. Οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης είναι οι λύσεις κάθε μιας από τις εξισώσεις $x^2 - 4 = 5$ και $x^2 - 4 = -\frac{7}{2}$. Άρα οι ± 3, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Παράδειγμα 4.2 Να επιλυθεί η εξίσωση $9 \cdot 2^{2x+1} - 35 \cdot 6^x + 4 \cdot 3^{2x+1} = 0$.

Λύση Η εξίσωση γράφεται $18 \cdot 2^{2x} - 35 \cdot 2^x \cdot 3^x + 12 \cdot 3^{2x} = 0$. Διαιρώντας με το 3^{2x} παίρνει την μορφή
$18\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 35\left(\frac{2}{3}\right)^x + 12 = 0$. Θέτοντας $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ γράφεται $18y^2 - 35y + 12 = 0$. Επιλύοντας θα βρούμε ρίζες τις $y_1 = \frac{4}{9}$ και $y_1 = \frac{3}{2}$. Αναγόμαστε στο να επιλύσουμε τις $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4}{9}$ και $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2}$. Η πρώτη γράφεται $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ και η δεύτερη $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$, από όπου διαβάζουμε τις λύσεις $x = 2$ και $x = -1$, αντίστοιχα.

Παραδείγματα που απαιτούν διερεύνηση περιπτώσεων

Παράδειγμα 4.3 Για ποια λ έχει διπλή ρίζα η εξίσωση $\lambda x^2 - (\lambda + 3)x + \lambda - 5 = 0$;

Λύση Ξεκινάμε θεωρώντας τον συντελεστή του x^2 γιατί μόνο αν είναι διάφορος του μηδενός μπορούμε να εφαρμόσουμε τα παραπάνω συμπεράσματα. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις τις μελετάμε χωριστά. Αν $\lambda = 0$ η εξίσωση, ως πρωτοβάθμια, έχει μία ρίζα. Αν $\lambda \neq 0$ έχει διπλή ρίζα αν και μόνο αν $D = 0$. Εδώ
$D = (\lambda + 3)^2 - 4\lambda(\lambda - 5) = (\lambda + 3)^2 - 4\lambda^2 + 20\lambda = \lambda^2 + 6\lambda + 9 - 4\lambda^2 + 20\lambda =$
$= -3\lambda^2 + 26\lambda + 9 = (3\lambda + 1)(9 - \lambda)$.
Άρα η εξίσωση έχει διπλή ρίζα αν $\lambda = -\frac{1}{3}$ ή $\lambda = 9$.

Παράδειγμα 4.4 Να επιλυθεί και διερευνηθεί η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 + 2(\lambda - 2)x + \lambda = 0$.

Λύση Διακρίνουμε περιπτώσεις.

- Αν $\lambda = 1$, η εξίσωση γράφεται $2(1-2)x+1=0$, ή $-2x+1=0$, οπότε $x=\frac{1}{2}$
- Αν $\lambda \neq 1$ η εξίσωση είναι δευτεροβάθμια .

  $\frac{D}{4} = (\lambda-2)^2 - \lambda(\lambda-1) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 - \lambda^2 + \lambda = -3\lambda + 4$ οπότε $D > 0$ αν και μόνον αν $-3\lambda + 4 > 0$ δηλαδή $\lambda < \frac{4}{3}$. Οπότε έχουμε δύο ρίζες αν $\lambda < \frac{4}{3}$ (και $\lambda \neq 1$), δηλαδή αν $\lambda \in (-\infty, 1) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right)$

  Έχουμε διπλή ρίζα αν $D = 0$, δηλαδή $\lambda = \frac{4}{3}$. Η εξίσωση σε αυτή την περίπτωση παίρνει την μορφή $\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} = 0$, ισοδύναμα $\frac{1}{3}(x-2)^2 = 0$, της οποίας η διπλή ρίζα είναι η $x = 2$.

  Δεν έχουμε ρίζες αν $D < 0$, δηλαδή $\lambda > \frac{4}{3}$.

$\lambda < 1$	$\lambda = 1$	$1 < \lambda < \frac{4}{3}$	$\lambda = \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3} < \lambda$
δύο ρίζες	μία ρίζα	δύο ρίζες	διπλή	αδύνατη στο $\mathbb{R}$
$\rho_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	$\rho_1 = \frac{1}{2}$	$\rho_1, 2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	$\rho_1 = \rho_2 = 2$	

4.2 Άθροισμα και γινόμενο ριζών δευτεροβάθμιας εξίσωσης, τύποι Vieta

Είδαμε ότι αν $D \geq 0$ τότε η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$ έχει δύο ρίζες (ή μία διπλή) ρ_1, ρ_2, όπου

$\rho_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $\rho_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

Σε αυτή την περίπτωση είναι $\rho_1 + \rho_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b}{a}$

και

$\rho_1\rho_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2-(\sqrt{D})^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$

Αντίστροφα, αν ρ_1, ρ_2 δύο αριθμοί, η εξίσωση $x^2 - (\rho_1+\rho_2)x + \rho_1\rho_2 = 0$ γράφεται $(x-\rho_1)(x-\rho_2) = 0$, οπότε έχει ως ρίζες ακριβώς τις ρ_1, ρ_2.

Οι τύποι $\rho_1 + \rho_2 = \frac{-b}{a}$, $\rho_1\rho_2 = \frac{c}{a}$ ονομάζονται τύποι Vieta (ή Viete) για την δευτεροβάθμια. Παρακάτω θα δούμε και γενικεύσεις τους για πολυωνυμικές εξισώσεις οποιουδήποτε βαθμού.

Παράδειγμα 4.5 Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 4x + 1 = 0$, να βρεθούν οι τιμές των $\frac{1}{\rho_1\rho_2}$, $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ και $\rho_1^3 + \rho_2^3$, χωρίς να επιλυθεί η εξίσωση.

Λύση Από τους τύπους του Vieta έχουμε $\rho_1 + \rho_2 = 4$ και $\rho_1\rho_2 = 1$ οπότε

$\dfrac{1}{\rho_1\rho_2} = \dfrac{1}{\frac{c}{a}} = \dfrac{a}{c} = 1,$

$\dfrac{1}{\rho_1} + \dfrac{1}{\rho_2} = \dfrac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2} = -\dfrac{b}{c} = 4$ και

$\rho_1^3 + \rho_2^3 = (\rho_1+\rho_2)^3 - 3\rho_1\rho_2(\rho_1+\rho_2) = 4^3 - 3 \cdot 1 \cdot 4 = 64 - 12 = 52$.

Παράδειγμα 4.6 Αν $\rho_1,\ \rho_2 \neq 0$ ρίζες της $ax^2+bx+c=0$, να βρεθεί η εξίσωση με ρίζες $\frac{1}{\rho_1},\ \frac{1}{\rho_2}$.

Λύση

α΄ τρόπος Το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της ζητούμενης είναι (βλέπε προηγούμενο παράδειγμα)

$\dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{1}{\rho_2}=-\dfrac{b}{c}$ και $\dfrac{1}{\rho_1\rho_2}=\dfrac{a}{c}$.

Συνεπώς η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2-\left(-\frac{b}{c}\right)x+\frac{a}{c}=0$, δηλαδή η $cx^2+bx+a=0$.

β΄ τρόπος Αν x ρίζα της $ax^2+bx+c-0$, τότε η $y=\frac{1}{x}$ (*) είναι ρίζα της ζητούμενης. Όμως η (*) δίνει $x=\frac{1}{y}$ οπότε προφανώς ισχύει $a\left(\frac{1}{y}\right)^2+b\left(\frac{1}{y}\right)+c=0$. Όμως η τελευταία γράφεται $a+by+cy^2=0$ και είναι η ζητούμενη εξίσωση.

Παράδειγμα 4.7 Αν η $ax^2+bx+c=0$ έχει ρίζες $\rho_1,\ \rho_2$, να βρεθεί η εξίσωση με ρίζες τις $5\rho_1-\rho_2$ και $5\rho_2-\rho_1$.

Λύση

α΄ τρόπος $(5\rho_1-\rho_2)+(5\rho_2-\rho_1)=4(\rho_1+\rho_2)=-\frac{4b}{a}$ και

$(5\rho_1-\rho_2)(5\rho_2-\rho_1)=25\rho_1\rho_2-5(\rho_1^2+\rho_2^2)+\rho_1\rho_2=$

$=25\rho_1\rho_2-5[(\rho_1+\rho_2)^2-2\rho_1\rho_2]+\rho_1\rho_2=36\rho_1\rho_2-5(\rho_1+\rho_2)^2=$

$=36\frac{c}{a}-5(-\frac{b}{a})^2=\frac{36ac-5b^2}{a^2}$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2+\dfrac{4b}{a}x+\dfrac{36ac-5b^2}{a^2}=0$ ή $a^2x^2+4abx+36ac-5b^2=0$

β΄ τρόπος Έχουμε $5\rho_1-\rho_2=5(\rho_1+\rho_2)-6\rho_2=5\left(-\frac{b}{a}\right)-6\rho_2=-\frac{5b}{a}-6\rho_2$

Όμοια $5\rho_2-\rho_1=-\frac{5b}{a}-6\rho_2$

Δηλαδή, αν x ρίζα της $ax^2+bx+c=0$ θέλουμε εξίσωση με ρίζα

$y=-\frac{5b}{a}-6x$. Άρα η ζητούμενη εξίσωση προκύπτει από την αρχική, αν θέσουμε $x=\dfrac{-\frac{5b}{a}-y}{6}=\dfrac{-5b-ay}{6a}$. Άρα παίρνουμε την εξίσωση $a\left(\frac{-5b-ay}{6a}\right)^2+b\left(\frac{-5b-ay}{6a}\right)+c=0$, δηλαδή την

$a\left(\dfrac{25b^2+10aby+a^2y^2}{36a^2}\right)+b\left(\dfrac{-5b-ay}{6a}\right)+c=0$. Μετά τις πράξεις καταλήγουμε στην $a^2y^2+4aby+36ac-5b^2=0$, όπως πριν.

Παράδειγμα 4.8 Να βρεθεί ο m αν η εξίσωση $x^2+2x+m-2=0$ έχει πραγματικές ρίζες και η μία είναι διπλάσια της άλλης.

Λύση Θέλουμε να ισχύει $D\geq 0$ και $\rho_1=2\rho_2$.

Η πρώτη σχέση ισοδυναμεί με την $4-4(m-2)\geq 0$, δηλαδή $m\leq 3$.

Ισχύει $\rho_1+\rho_2=-\frac{b}{a}=-2$ οπότε η σχέση $\rho_1=2\rho_2$ δίνει

$2\rho_2+\rho_2=-2$, δηλαδή $\rho_2=-\frac{2}{3}$ και άρα $\rho_1=2\rho_2=-\frac{4}{3}$.

Επίσης, $\rho_1\rho_2 = m-2$, δηλαδή $m-2 = (-\frac{4}{3})(-\frac{2}{3}) = \frac{8}{9}$, άρα $m = \frac{26}{9}$, η οποία είναι δεκτή καθώς $\frac{26}{9} \leq 3$. Συνεπώς για $m = \frac{26}{g}$ (και μόνον τότε) ισχύουν τα ζητούμενα.

Παράδειγμα 4.9 Για ποια λ η εξίσωση $4x^2 - x + 4\lambda + 5$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες·

Λύση Απαιτούμε $D > 0$ δηλαδή $1 - 16(4\lambda+5) \geq 0$ ή $-79 - 64\lambda \geq 0$, δηλαδή $\lambda \leq -\frac{79}{64}$.

Επίσης απαιτούμε $\rho_1\rho_2 < 0$ ή ισοδύναμα $\frac{c}{a} < 0$, δηλαδή $\frac{4\lambda+5}{4} < 0$ ή $\lambda < -\frac{5}{4}$. Άρα τα ζητούμενα λ είναι τα σημεία όπου συναληθεύουν οι δύο ανισότητες, δηλαδή τα σημεία του διαστήματος $\left(-\infty, -\frac{5}{4}\right)$.

Παρατήρηση Γενικότερα, αν $D \geq 0$ τότε οι ρίζες της $ax^2+bx+c = 0$ ικανοποιούν τα εξής:

(1) αν $\frac{c}{a} < 0$, οι ρίζες είναι ετερόσημες και μάλιστα

- (1α) αν $-\frac{b}{a} > 0$ τότε μεγαλύτερη κατ΄ απόλυτη τιμή είναι η θετική, ενώ

- (1β) αν $-\frac{b}{a} < 0$ τότε μεγαλύτερη κατ΄ απόλυτη τιμή θα είναι η αρνητική.

(2) Θα έχουμε δύο ρίζες άνισες και θετικές αν και μόνο αν $D > 0$,
$\frac{c}{a} > 0$, $-\frac{b}{a} > 0$.

Παράδειγμα 4.10 Για ποια λ η εξίσωση $4x^2 - x + 4\lambda + 5 = 0$ έχει θετικές και άνισες ρίζες;

Λύση Για να έχουμε άνισες ρίζες πρέπει να ισχύει $D > 0$ δηλαδή $1-16(4\lambda+5) > 0$ ή $\lambda < -\frac{79}{64}$.

Οι ρίζες είναι ομόσημες αν $\frac{c}{a} > 0$, δηλαδή αν $\frac{4\lambda+5}{4} > 0$ ή $\lambda > -\frac{5}{4}$.

Έχουν θετικό άθροισμα αν $-\frac{b}{a} > 0$, το οποίο ισχύει για κάθε λ.

Άρα τα ζητούμενα λ είναι αυτά για τα οποία συναληθεύουν οι ανισότητες $\lambda < -\frac{79}{64}$ και $\lambda > -\frac{5}{4}$, που συμβαίνει όταν $\lambda \in \left(-\frac{5}{4}, -\frac{79}{64}\right)$.

Παράδειγμα 4.11 Για ποια λ η εξίσωση $x^2 - 2(\lambda+2)x - \lambda^2 = 0$ έχει άνισες πραγματικές ρίζες που είναι αντίθετοι αριθμοί;

Λύση Οι ρίζες είναι άνισες αν $D > 0$, δηλαδή αν $4(\lambda+2)^2 + 4\lambda^2 > 0$, το οποίο ισχύει για κάθε λ. Επίσης, οι ρίζες είναι αντίθετες αν $-\frac{b}{a} = 0$, δηλαδή $2(\lambda+2) = 0$ ή $\lambda = -2$.

4.3 Κυβικές Εξισώσεις

Κυβική εξίσωση είναι μια εξίσωση της μορφής $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$, ή ισοδύναμα $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$. Αποδεικνύεται ότι κάθε τέτοια εξίσωση έχει είτε μία είτε τρεις πραγματικές ρίζες. Ακολουθεί μέθοδος που βρίσκει μία πραγματική ρίζα, οπότε με παραγοντοποίηση αναγόμαστε σε δευτεροβάθμια εξίσωση, που ξέρουμε να την λύνουμε.

Θέτοντας $x = y - \frac{A}{3}$, η εξίσωση γράφεται

$\left(y - \frac{A}{3}\right)^3 + A\left(y - \frac{A}{3}\right)^2 + B\left(y - \frac{A}{3}\right) + C = 0,$

δηλαδή $y^3 + 0y^2 + Py + Q = 0$. Άρα αρκεί να μελετήσουμε κυβικές εξισώσεις της μορφής $y^3 + Py + Q = 0$.

Μέθοδος Cardano

Περίπτωση θετικού P.

Για ευκολία θα παρουσιάσουμε την μέθοδο με παράδειγμα, και συγκεκριμένα την εξίσωση $x^3 + 6x - 20 = 0$. Τονίζουμε όμως ότι τα αναφερόμενα ισχύουν γενικά για εξισώσεις της μορφής $x^3 + Px + Q = 0$ με $P > 0$.

Θέτουμε $x = u - v$ οπότε η εξίσωση παίρνει την μορφή $(u-v)^3 = -6(u-v) + 20$ ή

$u^3 - v^3 - 3uv(u-v) = -6(u-v) + 20$

Επιλέγουμε u, v έτσι ώστε να έχουμε ισότητα των συντελεστών του $u - v$ στα δύο μέλη. Προκύπτουν οι δύο εξισώσεις $u^3 - v^3 = 20$ και $-3uv = -6$ (Στη γενική περίπτωση θα είναι $u^3 - v^3 = -P$, $-3uv = -P$). Πρόκειται για το σύστημα $u^3 - v^3 = 20$ και $uv = 2$ ως προς u, v, το οποίο λύνουμε κατά τα γνωστά. Συγκεκριμένα οι εξισώσεις γράφονται

$u^3 - v^3 = 20$ και $u^3(-v)^3 = -8$.

Άρα τα u^3, $(-v)^3$ είναι ρίζες της εξίσωσης $-\lambda^2 - 20\lambda - 8 = 0$. Λύνοντας θα βρούμε $u^3 = \frac{20+\sqrt{400+32}}{2} = \frac{10+\sqrt{108}}{1} = 10 + \sqrt{108}$, $-v^3 = 10 - \sqrt{108}$,

οπότε $u = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10}$, $v = \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$

Άρα $x = u - v = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$. (Μπορούμε να ελέγξουμε ότι η παράσταση αυτή ισούται με 2).

Γενικά η εξίσωση $x^3 + px + q = 0$ με $p > 0$ λύνεται θέτοντας $x = u - v$

οπότε προκύπτει η ρίζα

$$x = -\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} + \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}$$

Περίπτωση αρνητικού P.

Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα $x^3 - 15x - 4 = 0$

Θέτουμε $x = u + v$, οπότε παίρνουμε

$(u+v)^3 = 15(u+v) + 4$ ή $u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = 15(u+v) + 4$.

Επιλέγουμε $u^3 + v^3 = 4$ και $3uv = 15$, δηλαδή $u^3 + v^3 = 4$, $u^3v^3 = 225$.

Από αυτές βρίσκουμε $u^3 = 2 + \sqrt{-121} = 2 + 11i$, $v^3 = 2 - \sqrt{-121} = 2 - 11i$

οπότε $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$.

Ας σημειωθεί ότι το δεξί μέλος είναι πραγματικός αριθμός, ως άθροισμα δύο συζυγών μιγαδικών. Το να το φέρουμε στην μορφή χωρίς την εμφάνιση του $\sqrt{-1}$ δεν είναι πάντα απλό. Στην συγκεκριμένη περίπτωση βγαίνει $x = 4$.

Παράδειγμα 4.12 Να επιλυθεί η εξίσωση $x^3 + 3x^2 + 9x - 13 = 0$.

Λύση Θέτουμε $x = y - 1$, οπότε παίρνουμε την εξίσωση

$(y-1)^3+3(y-1)^2+9(y-1)-13 = 0$ ή $y^3-3y^2+3y-1+3y^2-6y+3+9y-9-13 = 0$ ή $y^3 + 6y - 20 = 0$. Την εξίσωση αυτή την λύσαμε παραπάνω, οπότε είναι

$y = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$ και τελικά

$x = -1 + \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$.

Μέθοδος Vieta Μία δεύτερη μέθοδος επίλυσης τριτοβάθμιων εξισώσεων οφείλεται στον Vieta. Το πρώτο βήμα είναι να φέρουμε την εξίσωση στην μορφή $x^3+Px+Q = 0$, όπως ακριβώς κάναμε στην μέθοδο Cardano. Κατόπιν κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $x = y - \frac{P}{3y}$. Είναι τότε

$x^3 + Px + Q = \left(y - \frac{P}{3y}\right)^3 + \left(y - \frac{P}{3y}\right) + Q =$

$= \left(y^3 - Py + \frac{P^2}{3y} - \frac{P^3}{27y^3}\right)^3 + \left(Py - \frac{P^2}{3y}\right) + Q$

$= y^3 - \frac{P^3}{27y^3} + Q.$

Οπότε αναγόμαστε στην εξίσωση $= y^3 - \frac{P^3}{27y^3} + Q = 0$. Αυτή ανάγεται σε δευτεροβάθμια ως προς y^3 και η διαδικασία από κει και πέρα απλή. Αφήνουμε τις λεπτομέρειες στον αναγνώστη.

4.4 Σχέσεις ριζών και συντελεστών μιας κυβικής εξίσωσης

Αν ρ_1, ρ_2, ρ_3 οι ρίζες της $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, τότε $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3)$ (απόδειξη στο 5.3).

Έτσι έχουμε

$ax^3 + bx^2 + cx + d = a\,[x^3 - (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)x^2 + (\rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1)x - \rho_1\rho_2\rho_3]$.

Συγκρίνοντας συντελεστές (θα δούμε στο 5.2 ότι επιτρέπεται) έχουμε

$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = -\frac{b}{a}$,

$\rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1 = \frac{c}{a}$ και

$\rho_1\rho_2\rho_3 = -\frac{d}{a}$.

Οι τρεις αυτές σχέσεις ονομάζονται *Τύποι Vieta* για την τριτοβάθμια.

Παράδειγμα 4.13 Αν ρ_1, ρ_2, ρ_3 ρίζες της $3x^3 + 6x^2 - 4x + 7 = 0$, να βρεθεί τριτοβάθμια εξίσωση με ρίζες τις $\frac{1}{\rho_1\rho_2}$, $\frac{1}{\rho_2\rho_3}$, $\frac{1}{\rho_3\rho_1}$.

α′ τρόπος Από τους τύπους Vieta έχουμε $\rho_1+\rho_2+\rho_3=-\frac{6}{3}=-2$, $\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1=-\frac{4}{3}$ και $\rho_1\rho_2\rho_3=-\frac{7}{3}$.

Έτσι

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2}+\frac{1}{\rho_2\rho_3}+\frac{1}{\rho_3\rho_1}=\frac{1}{\rho_1\rho_2\rho_3}(\rho_1+\rho_2+\rho_3)=\frac{-2}{-\frac{7}{3}}=\frac{6}{7},$$

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2}\frac{1}{\rho_2\rho_3}+\frac{1}{\rho_2\rho_3}\frac{1}{\rho_3\rho_1}+\frac{1}{\rho_3\rho_1}\frac{1}{\rho_1\rho_2}=\frac{1}{\rho_1\rho_2\rho_3}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_3}\right)=$$

$$=\frac{\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3}{(\rho_1\rho_2\rho_3)^2}=\frac{-\frac{4}{3}}{\frac{49}{9}}=-\frac{12}{49} \text{ και}$$

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2}\frac{1}{\rho_1\rho_2}\frac{1}{\rho\rho_3}=\frac{1}{(\rho_1\rho_2\rho_3)^2}=\frac{1}{\left(-\frac{7}{3}\right)^2}=\frac{9}{49}.$$

Άρα η εξίσωση είναι $x^3-\dfrac{6}{7}x^2-\dfrac{12}{49}x-\dfrac{9}{49}=0$, ισοδύναμα $49x^3-42x^2-12x-9=0$.

β′ τρόπος Ισχύει $\dfrac{1}{\rho_2\rho_3}=\dfrac{\rho_1}{\rho_1\rho_2\rho_3}=\dfrac{\rho_1}{-\frac{7}{3}}=-\dfrac{3}{7}\rho_1$, όμοια $\frac{1}{\rho_1\rho_3}=-\frac{3}{7}\rho_2$, $\frac{1}{\rho_1\rho_2}=-\frac{3}{7}\rho_3$. Άρα οι ρίζες της ζητούμενης εξίσωσης λαμβάνονται από τις ρίζες x της αρχικής, αν θέσουμε $y=-\frac{3}{7}x$ ή $x=-\frac{7}{3}y$. Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι

$3(-\frac{7}{3}y)^3+6(-\frac{7}{3}y)^2-4(-\frac{7}{3}y)+7=0$, ισοδύναμα $49y^3-42y^2-12y-9=0$.

Παράδειγμα 4.14

Αν ρ_1, ρ_2, ρ_3 οι ρίζες της $x^3+ax^2+bx+c=0$, να αποδειχθεί ότι

$(\rho_1+\rho_2)(\rho_2+\rho_3)(\rho_3+\rho_1)=c-ab$

Λύση

Ισχύει $\rho_1+\rho_2=\rho_1+\rho_2+\rho_3-\rho_3=-a-\rho_3$. Όμοια $\rho_1+\rho_3=-a-\rho_2$, $\rho_2+\rho_3=-a-\rho_1$.

Ένας τρόπος να συνεχίσουμε, είναι να γράψουμε

$(\rho_1+\rho_2)(\rho_2+\rho_3)(\rho_3+\rho_1)=(-a-\rho_3)(-a-\rho_1)(-a-\rho_2)=$

$=-a^3-(\rho_1+\rho_2+\rho_3)a^2-(\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1)a-\rho_1\rho_2\rho_3=$

$=-a^3-a^2(-a)-ab-a(-c)=c-ab.$

Ένας δεύτερος τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι αν x ρίζα της αρχικής, τότε η εξίσωση με ρίζα $y=-a-x$ προκύπτει αν στην αρχική θέσουμε $x=-a-y$. Σε αυτή την περίπτωση παίρνουμε

$(-a-y)^3+a(-a-y)^2+b(-a-y)+c=0$ (*). Με άλλα λόγια η εξίσωση αυτή έχει ρίζες $\rho_1+\rho_2$, $\rho_2+\rho_3$, $\rho_3+\rho_1$.

Ανοίγοντας τις παρενθέσεις γίνεται

$-(a^3+3a^2y+3ay^2+y^3)+a(a^2+2ay+y^2)-ab-by+c=0$, δηλαδή ισοδύναμα $y^3+2ay^2+(a^2+b)y+ab-c=0$.

Τώρα, το $(\rho_1+\rho_2)(\rho_2+\rho_3)(\rho_3+\rho_1)$ είναι το γινόμενο των ριζών αυτής της εξίσωσης, οπότε ισούται με $-\frac{ab-c}{1}=c-ab$

Παράδειγμα 4.15 Αν $\rho_1+\rho_2+\rho_3=1$, $\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2=2$ και $\rho_1^3+\rho_2^3+\rho_3^3=3$, να βρεθεί (τριτοβάθμια) εξίσωση με ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 .

Λύση Ψάχνουμε εξίσωση της μορφής $ax^3+bx^2+cx+d=0$. Χωρίς βλάβη στην γενικότητα, $a=1$ (αλλιώς διαιρούμε το πολυώνυμο με το a). Για τα b, c, d θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους Vieta αφού πρώτα προσδιορίσουμε τις τιμές των $-b=\rho_1+\rho_2+\rho_3$, $c=\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1$ και $-d=\rho_1\rho_2\rho_3$ με χρήση των παραπάνω.

Από την υπόθεση έχουμε $-b=\rho_1+\rho_2+\rho_3=1$, οπότε $b=-1$. Από την ταυτότητα $(\rho_1+\rho_2+\rho_3)^2=\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2+2(\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1)$ έχουμε $1^2=2+2(\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1)$, οπότε $c=\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1=\frac{1}{2}$. Τέλος, από την ταυτότητα Euler έχουμε $\rho_1^3+\rho_2^3+\rho_3^3-3\rho_1\rho_2\rho_3=(\rho_1+\rho_2+\rho_3)(\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2-\rho_1\rho_2-\rho_2\rho_3-\rho_3\rho_1$ άρα $3-3\rho_1\rho_2\rho_3=1\times\left(2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$. Έπεται ότι $\rho_1\rho_2\rho_3=\frac{1}{6}$, οπότε $d=-\frac{1}{6}$. Καταλήγουμε ότι η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^3-x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}=0$. Μπορούμε αν θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε επί 6 για να την γράψουμε σε ισοδύναμη μορφή $6x^3-6x^2-3x-1=0$.

Παράδειγμα 4.16 Αν ρ_1, ρ_2, ρ_3 οι ρίζες της $x^3+ax+b=0$, να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων $\rho_1^3+\rho_2^3+\rho_3^3$, $\rho_1^4+\rho_2^4+\rho_3^4$ και $\rho_1^9+\rho_2^9+\rho_3^9$.

Λύση Ένας τρόπος να προσδιοριστεί η τιμή του $\rho_1^3+\rho_2^3+\rho_3^3$ είναι από την ταυτότητα Euler, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, αφού πρώτα βρεθούν οι τιμές των $\rho_1+\rho_2+\rho_3$, $\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1$, $\rho_1\rho_2\rho_3$, και $\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2$. Εύκολα βλέπουμε με χρήση των τύπων Vieta ότι οι τιμές αυτές είναι 0, a, $-b$ και $0^2-2b=-2b$, αντίστοιχα. Αφήνουμε στον αναγνώστη αλλά θα περιγράψουμε μία καλύτερη μέθοδο: Αφού οι ρ_1,ρ_2,ρ_3 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^3+ax+b=0$, ισοδύναμα $x^3=-ax-b\,(1)$, την ικανοποιούν. Άρα ισχύει $\rho_1^3=-a\rho_1-b\,\rho_2^3=-a\rho_2-b\,\rho_3^3=-a\rho_3-b\,(2)$. Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε $\rho_1^3+\rho_2^3+\rho_3^3=-a(\rho_1+\rho_2+\rho_3)-3b=-a\cdot 0-3b=-3b$.

Από την (1) έχουμε $x^4=-ax^2-bx$ άρα $\rho_1^4=-a\rho_1^2-b\rho_1\,\rho_2^4=-a\rho_2^2-b\rho_2\,\rho_3^4=-a\rho_3^2-b\rho_3$.
Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $\rho_1^4+\rho_2^4+\rho_3^4=-a(\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2)-3b(\rho_1+\rho_2+\rho_3)=-a(-2b)-3\cdot 0=2ab$ Για το $\rho_1^9+\rho_2^9+\rho_3^9$ θα χρησιμοποιήσουμε το ίδιο τέχνασμα της πρόσθεσης κατά μέλη αλλά αφού πρώτα επεξεργαστούμε την αρχική εξίσωση: Με ύψωση της (1) στη τρίτη δύναμη έχουμε $x^9=(-ax-b)^3=-a^3x^3-3a^2bx^2-3ab^2x-b^3$.
Άρα
$\rho_1^9=-a^3\rho_1^3-3a^2b\rho_1^2-3ab^2\rho_1-b^3$
$\rho_2^9=-a^3\rho_2^3-3a^2b\rho_2^2-3ab^2\rho_2-b^3$
$\rho_3^9=-a^3\rho_3^3-3a^2b\rho_3^2-3ab^2\rho_3-b^3$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει $\rho_1^9+\rho_2^9+\rho_3^9=-a^3(\rho_1^3+\rho_2^3+\rho_3^3)-3a^2b(\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2)-3ab^2(\rho_1+\rho_2+\rho_3)-3b^3=-a^3(-3b)-3a^2b(-2b)-3ab^2\cdot 0-3b^3=$

$-3a^3b + 6a^2b^2 - 3b^3.$

Κεφάλαιο 5

Συστήματα

Θα ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα εξίσωσης με δύο αγνώστους. Οι λύσεις θα είναι άπειρες το πλήθος και το πρόβλημά μας είναι να τις καταγράψουμε ως σύνολο.

Παράδειγμα 5.1 Να επιλυθεί η εξίσωση $3x + 8y = 7$.

Λύση Εδώ $x = \frac{7-8y}{3}$. Το ζεύγος $(x, y) = \big(\frac{7-8y}{3}, y\big)$ είναι λύση.

Το σύνολο των λύσεων είναι το $\{\big(\frac{7-8y}{3}, y\big) \,|y \in \mathbb{R}\}$

Άλλος τρόπος: έχουμε $y = \frac{7-3x}{8}$, οπότε το σύνολο των λύσεων είναι το $\{\big(x, \frac{7-3x}{8}\big) \,|x \in \mathbb{R}\}$

Ας τονιστεί ότι τα σύνολα $A = \{\big(\frac{7-8y}{3}, y\big) \,|y \in \mathbb{R}\}$ και $B = \{\big(x, \frac{7-3x}{8}\big) \,|x \in \mathbb{R}\}$ που εμφανίστηκαν παραπάνω, συμπίπτουν. Πράγματι, έστω $(p, q) \in A$. Θα δείξουμε ότι $(p, q) \in B$ και αντίστροφα.

Αφού $(p, q) \in A$, υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $(p, q) = (\frac{7-8y}{3}, y)$, δηλαδή $p = \frac{7-8y}{3}$, $q = y$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $(p, q) \in B$, δηλαδή ότι $\big(\frac{7-8y}{3}, y\big) \in B$. Για τον σκοπό αυτό θέτουμε $x = \frac{7-8y}{3}$. Έχουμε τότε $3x = 7 - 8y$, δηλαδή $y = \frac{7-3x}{8}$ και άρα $\big(\frac{7-8y}{3}, y\big) = \big(x, \frac{7-3x}{8}\big) \in B$. Όμοια το αντίστροφο.

Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

όπου τουλάχιστον ένα από τα a_1, a_2, b_1, b_2 είναι διάφορο του 0.

Από τις αρχικές έπεται ότι

$$\begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y &= c_1b_2 \\ a_2b_1x + b_1b_2y &= c_2b_1 \end{cases}$$

άρα $(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - b_1c_2$.

Όμοια

$$\begin{cases} a_1a_2x + a_1b_by &= a_2c_1 \\ a_1a_2x + a_1b_2y &= a_1c_2 \end{cases}$$

άρα $(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$

Δηλαδή $Dx = D_x$, $Dy = D_y$ όπου, με χρήση οριζουσών,

$D = a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$,

$D_x = c_1b_2 - b_1c_2 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Διακρίνουμε τώρα περιπτώσεις

1η Περίπτωση $D \neq 0$

Τότε η μοναδική λύση του συστήματος είναι η

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

2η Περίπτωση $D = 0$

Τότε οι εξισώσεις είναι

$0x = D_x$

$0y = D_y$

Συνεπώς αν $D_x \neq 0$ ή $D_y \neq 0$ το σύστημα είναι αδύνατο, ενώ αν $D_x = 0 = D_y$ το σύστημα είναι αόριστο (έχεις λύσεις όλα τα ζεύγη $(x, y) \in \mathbb{R}^2$).

Παράδειγμα 5.2 Να επιλυθεί και διερευνηθεί το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x + (\lambda + 2)y &= 2 \\ \quad x + \lambda y &= 1 \end{cases}$$

Λύση

Εδώ $D = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda + 2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\lambda + 2) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$

οπότε ισχύει $D = 0$ αν και μόνο αν $\lambda = 2, -1$.

Αν $\lambda \neq 2$ και $\lambda \neq -1$ τότε $D \neq 0$, οπότε έχουμε μοναδική λύση την

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \lambda + 2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}}{D} = \frac{2\lambda - \lambda - 2}{(\lambda - 2)(\lambda + 1)} = \frac{\lambda - 2}{(\lambda - 2)(\lambda + 1)} = \frac{1}{\lambda + 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\lambda - 2}{(\lambda - 2)(\lambda + 1)} = \frac{1}{\lambda + 1}$$

Αν $\lambda = -1$ το σύστημα ισοδυναμεί με $0x = \lambda - 2 = -3$ και $0y = \lambda - 2 = -3$, το οποίο είναι αδύνατο.

Αν $\lambda = 2$, τότε $D_x = \lambda - 2 = 0$ και $D_y = \lambda - 2 = 0$, άρα το σύστημα είναι αόριστο.

Μη Γραμμικά Συστήματα

Παράδειγμα 5.3 Να επιλυθεί το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} x + y &= 5 \\ xy &= 6 \end{cases}$$

Λύση α΄ τρόπος

Είναι $y = 5 - x$ άρα η $xy = 6$ γίνεται $x(5 - x) = 6$ ή $x^2 - 5x + 6 = 0$. Οι ρίζες της είναι $x = 2$ ή $x = 3$.

Αν $x = 2$, τότε $y = 3$ ενώ αν $x = 3$, τότε $y = 2$.

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι (2, 3), (3, 2). (Παρατηρούμε ότι λόγω συμμετρίας του συστήματος, οι λύσεις είναι και αυτές συμμετρικές)

β΄ τρόπος

Τα x, y είναι λύσεις της εξίσωσης $\lambda^2 -$ (άθροισμα ριζών)$\lambda +$ (γινόμενο ριζών) $= 0$, δηλαδή της $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$.

Αφού οι ρίζες της τελευταίας είναι 2 και 3, βρίσκουμε $(x, y) = (2, 3)$ ή $(x, y) = (3, 2)$, όπως πριν.

Παράδειγμα 5.4 Να επιλυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 45 \\ xy &= -18 \end{cases}$$

Λύση α΄ τρόπος Από τη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε $2xy = -36$,

άρα $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 45 - 36 = 9$, οπότε $x + y = \pm 3$. Αναγόμαστε στο να λύσουμε τα συστήματα

$\begin{cases} x + y &= 3 \\ xy &= -18 \end{cases}$, $\begin{cases} x + y &= -3 \\ xy &= -18 \end{cases}$ τα οποία είναι απλά (βλέπε το προηγούμενο παράδειγμα). Θα βρούμε τις λύσεις $(6, -3)$, $(-6, 3)$, $(3, -6)$ και $(-3, 6)$.

β΄ τρόπος

Είδαμε ότι $x + y = \pm 3$. Επίσης

$$\begin{aligned} (x - y)^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \\ &= 45 - 2(-18) \\ &= 81 \end{aligned}$$

Άρα $x - y = \pm 9$

Προκύπτουν τα γραμμικά συστήματα

$$\begin{cases} x+y &= 3 \\ x-y &= 9 \end{cases}, \begin{cases} x+y &= 3 \\ x-y &= -9 \end{cases}, \begin{cases} x+y &= -3 \\ x-y &= 9 \end{cases}, \begin{cases} x+y &= -3 \\ x-y &= -9 \end{cases}$$

που είναι απλά.

Παράδειγμα 5.5 Να επιλυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x^3+y^3 &= 9 \\ x+y &= 3 \end{cases}$$

Λύση Είναι $x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$ δηλαδή $9 = 27-3xy(x+y) = 27-9xy$, οπότε $xy = 2$.

Τελικά αναγόμαστε στο σύστημα

$$\begin{cases} x+y &= 3 \\ xy &= 2 \end{cases}$$

που είναι απλό. Έχει λύσεις (2, 1), (1, 2).

Ειδικά Τεχνάσματα

Υπάρχει πληθώρα συστημάτων που αντιμετωπίζονται με ειδικά τεχνάσματα, κατά περίπτωση. Ακολουθούν μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 5.6 Να επιλυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x+y+z+w=6 \\ y+z+w+e=1 \\ z+w+e+x=3 \\ w+e+x+y=1 \\ e+x+y+z=5 \end{cases}$$

Λύση Προσθέτοντας τα παραπάνω κατά μέλη έχουμε $4(x+y+z+w+e) = 16$, οπότε $x+y+z+w+e = 4$. Σε συνδυασμό με την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $6+e = 4$, άρα $e = -2$.

Όμοια

$x+1 = 4$, άρα $x = 3$,

$y+3 = 4$, άρα $y = 1$,

$z+1 = 4$, άρα $z = 3$,

$w+5 = 4$, άρα $w = -1$,.

Τελικά η λύση του συστήματος είναι $(x, y, z, w, e) = (3, 1, 3, -1, -2)$.

Παράδειγμα 5.7 Να επιλυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{w}=4 \\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}-\frac{1}{w}=14 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{3y}+\frac{2}{w}=1 \end{cases}$$

Λύση Περιορισμοί $x, y, w \neq 0$.

Θέτουμε $\frac{1}{x} = X$, $\frac{1}{y} = Y$, $\frac{1}{w} = W$

Το σύστημα γίνεται γραμμικό, συγκεκριμένα το

$$\begin{cases} X+Y+W=4 \\ 2X+3Y-W=14 \\ X+\frac{Y}{3}+2W=1 \end{cases}$$

που λύνεται εύκολα. Θα βρούμε $(X=2,\, Y=3,\, W=-1)$ από όπου $(x,\, y,\, w) = \left(\frac{1}{2},\, \frac{1}{3},\, -1\right)$.

Παράδειγμα 5.8

Να επιλυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x+y+z &= 4 \\ x^2+y^2+z^2 &= 66 \\ x^3+y^3+z^3 &= 280 \end{cases}$$

Λύση

Έχουμε $xy+yz+zx = \frac{1}{2}[(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)] = \frac{1}{2}(4^2-66) = -25$

Όμως $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$, άρα $280-3xyz = 4(66-(-25))$ οπότε $xyz=-28$

Άρα τα $x,\, y,\, z$ είναι ρίζες της εξίσωσης

$\lambda^3-4\lambda^2+(-25)\lambda-(-28)=0$ ή $\lambda^3-4\lambda^2-25\lambda+28=0$. Οι ρίζες είναι $-4,\, 1,\, 7$.

Τελικά οι λύσεις του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned} (x,\, y,\, z) &= (1,\, -4,\, 7) \\ (x,\, y,\, z) &= (-4,\, 1,\, 7) \\ (x,\, y,\, z) &= (-4,\, 7,\, 1) \\ (x,\, y,\, z) &= (1,\, 7,\, -4) \\ (x,\, y,\, z) &= (7,\, -4,\, 1) \\ (x,\, y,\, z) &= (7,\, 1,\, -4) \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 6

Πολυώνυμα

Μία συνάρτηση της μορφής $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ή γενικότερα το $\mathbb{C}$, όπου οι συντελεστές $a_0, \ldots, a_n$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, ονομάζεται πολυωνυμική συνάρτηση ή απλά πολυώνυμο. Ο εκθέτης του πιο υψηλόβαθμου όρου με μη μηδενικό συντελεστή, ονομάζεται **βαθμός του πολυωνύμου**. Για παράδειγμα ο βαθμός του $x^2 + 3x - 5$ είναι 2 και ο βαθμός του σταθερού πολυωνύμου $p(x) = 3$ είναι 0. Για το μηδενικό πολυώνυμο $p(x) = 0$, δεν ορίζουμε βαθμό. Αν ένας αριθμός a του πεδίου ορισμού ενός πολυωνύμου p ικανοποιεί $p(a) = 0$, λέμε ότι το a είναι ρίζα του.

6.1 Διαίρεση πολυωνύμων

Η διαίρεση πολυωνύμων μας είναι γνωστή από το Λύκειο. Μερικές φορές είναι ευκολότερο να επεξεργαστούμε απευθείας τις παραστάσεις μας. Π.χ. στο παράδειγμα που ακολουθεί, επεξεργαζόμαστε τον αριθμητή ώστε να εμφανίζεται ο παρονομαστής ώστε να εκτελέσουμε τη διαίρεση του αριθμητή με τον παρανομαστή στο κλάσμα $\dfrac{x^3-6x+7}{x^2-3x+2}$. Συγκεκριμένα,

$$\frac{x^3-6x+7}{x^2-3x+2} = \frac{x(x^2-3x+2)-x(-3x+2)-6x+7}{x^2-3x+2} =$$
$$\frac{x(x^2-3x+2)+(3x^2-8x+7)}{x^2-3x+2} = x + \frac{3x^2-8x+7}{x^2-3x+2} =$$
$$= x + \frac{3(x^2-3x+2)-(-9x+6)-8x+7}{x^2-3x+2} =$$
$$= x + 3 + \frac{x+1}{x^2-3x+2}.$$

Από τις πράξεις αυτές παίρνουμε τη σχέση $x^3-6x+7 = (x+3)(x^2-3x+2)+(x+1)$. Γενικά, αν p, q δύο πολυώνυμα, παρόμοια διαδικασία διαίρεσης μας δίνει ισότητα της μορφής $p(x) = q(x)\pi(x) + u(x)$ (1) όπου ο βαθμός του υπολοίπου u είναι μικρότερος

του βαθμού του q. Η ίδια σχέση γράφεται
$\frac{p(x)}{q(x)} = \pi(x) + \frac{u(x)}{q(x)}$

Το π ονομάζεται **πηλίκο** και το u **υπόλοιπο** της διαίρεσης $p(x) : q(x)$. Αν το υπόλοιπο είναι 0, δηλαδή αν ισχύει $p(x) = q(x)\pi(x)$ (1) λέμε ότι το q **διαιρεί** το p και γράφουμε $q(x)|p(x)$. Για παράδειγμα $x-1|x^2-1$ και, επίσης, $x-1|\frac{1}{2}(x^2-1)$

Σχόλιο Είναι σαφές από την διαδικασία της διαίρεσης πολυωνύμων ότι αν τα p, q έχουν πραγματικούς συντελεστές τότε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσής τους θα περιέχει (μόνο) πραγματικούς συντελεστές (δηλαδή κανένας δεν θα είναι μη πραγματικός μιγαδικός). Με όμοιο συλλογισμό διαπιστώνουμε ότι αν όλοι οι συντελεστές των p, q είναι ρητοί αριθμοί, τότε το πηλίκο και το υπόλοιπο θα περιέχουν (μόνο) ρητούς συντελεστές (δηλαδή κανένας δεν θα είναι άρρητος αριθμός).

Θεώρημα 6.1 *Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου p δια του $x-a$ είναι $p(a)$. Ειδικά, υπάρχει πολυώνυμο π με $p(x) = (x-a)\pi(x) + p(a)$.*

Απόδειξη Αν πάρουμε $q(x) = x - a$ στην (1), έχουμε $p(x) = (x-a)\pi(x) + u$ για κάποια πολυώνυμα π και u με τον βαθμό του u μικρότερο του βαθμού του $x-a$. Επειδή ο βαθμός του $x-a$ είναι 1, συμπεραίνουμε ότι το u είναι σταθερό (είτε το μηδενικό πολυώνυμο είτε μηδενικού βαθμού). Θέτοντας $x = a$ παίρνουμε $p(a) = u$, δηλαδή $p(x) = (x-a)\pi(x) + p(a)$.

□

Παράδειγμα 6.1 Αν $a \neq b$, να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου p δια του $(x-a)(x-b)$.

Λύση Η διαίρεση δίνει $p(x) = (x-a)(x-b)\pi(x) + Ax + B$. Για $x = a$ παίρνουμε $p(a) = Aa + B$, και για $x = b$, παίρνουμε $p(b) = Ab + B$. Λύνοντας το σύστημα ως προς Α, Β θα βρούμε $A = \frac{p(a)-p(b)}{a-b}$ και $B = p(a) - Aa = (a) - \frac{p(a)-p(b)}{a-b} \cdot a = \frac{-bp(a)+ap(b)}{a-b}$.

Δηλαδή το υπόλοιπο είναι
$Ax + B = \frac{p(a)-p(b)}{a-b}x + \frac{ap(b)-bp(a)}{a-b}$

Μπορούμε να εκφράσουμε το παραπάνω σε πιο συμμετρική μορφή: Με απλές πράξεις διαπιστώνουμε ότι το υπόλοιπο γράφεται ως

$$\frac{x-b}{a-b}p(a) + \frac{x-a}{b-a}p(b)$$

Θεώρημα 6.2 *Το a είναι ρίζα του πολυωνύμου p αν και μόνο αν $p(x) = (x-a)q(x)$ για κάποιο πολυώνυμο q.*

Απόδειξη

Η κατεύθυνση ($\Longleftarrow$) είναι προφανής. Αντίστροφα,

α′ τρόπος Έχουμε $p(x) = (x - a)q(x) + p(a)$. Όμως αν a ρίζα του p, δηλαδή $p(a) = 0$, τότε $p(x) = (x - a)p(x)$, όπως θέλαμε.

β′ τρόπος Έστω $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Αν a ρίζα του p, δηλαδή $p(a) = 0$, έχουμε

$p(x) = p(x) - p(a) =$

$= (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) - (a_n a^n + \cdots + a_1 a + a_0)$

$= a_n(x^n - a^n) + \cdots + a_1(x - a)$

$= a_n(x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) + \cdots + a_1(x - a) =$

$= (x - a)q(x)$, όπου q πολυώνυμο βαθμού $n - 1$.

□

Ορισμός Αν το a είναι ρίζα του p και αν για κάποιον φυσικό αριθμό $k \geq 1$ ισχύει $p(x) = (x - a)^k q(x)$ όπου q πολυώνυμο με $q(a) \neq 0$, θα λέμε ότι το a είναι ρίζα πολλαπλότητα k.

Για παράδειγμα η 1 είναι ρίζα πολλαπλότητας 1 του $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$ και πολλαπλότητας 2 του $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)^2(x + 2)$.

6.2 Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας

Θα θεωρήσουμε γνωστό αλλά χωρίς απόδειξη το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας:

Θεώρημα 6.3 *Κάθε πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές (άρα και πραγματικούς) έχει μια τουλάχιστον (μιγαδική) ρίζα.*

Πόρισμα 6.1 *Ένα πολυώνυμο p βαθμού n με μιγαδικούς συντελεστές έχει ακριβώς n ρίζες (μετρώντας και την πολλαπλότητα).*

Απόδειξη Αν ρ_1 ρίζα του p (υπάρχει από το προηγούμενο θεώρημα), τότε $p(x) = (x - \rho_1)q(x)$. Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία παίρνουμε $p(x) = a(x - \rho_1)\cdots(x - \rho_n)$

□

Πόρισμα 6.2 *Αν ένα πολυώνυμο p έχει βαθμό $\leq n$ και έχει τουλάχιστον $n + 1$ ρίζες, τότε το p είναι εκ ταυτότητας 0 (δηλαδή όλοι οι συντελεστές του είναι 0).*

Απόδειξη Έστω ότι το p έχει τη μορφή $p(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$, όπου $a_m \neq 0$ και $m \leq n$. Σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα το p γράφεται $p(x) = a_m(x - \rho_1)\ldots(x - \rho_m)$. Τότε δεν έχει ρίζες διαφορετικές από τα $\rho_1, \ldots, \rho_m$, το οποίο αντιφάσκει στην υπόθεση ότι έχει τουλάχιστον $n+1$ ρίζες.

□

Πόρισμα 6.3 *Αν p, q πολυώνυμα βαθμού $\leq n$, τα οποία είναι ίσα για $n+1$ τιμές του x, τότε αυτά είναι εκ ταυτότητας ίσα και όλοι οι αντίστοιχοι συντελεστές τους είναι ίσοι.*

Απόδειξη Εφαρμόζουμε το προηγούμενο στο $p-q$.

□

Παράδειγμα 6.2 Αν a, b, c διαφορετικοί ανά δύο, να αποδειχθεί η ταυτότητα,

$$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2(x-b)(x-a)}{(c-b)(c-a)} = x^2$$

Λύση Τα δύο μέλη της ισότητας είναι πολυώνυμα βαθμού ≤ 2, που οι τιμές τους για τρεις τιμές, τις $x=a$, $x=b$, $x=c$, είναι ίσες. Άρα ταυτίζονται για κάθε x.

Με σύγκριση των συντελεστών της μεταβλητής έπονται αμέσως και οι ταυτότητες στο επόμενο Πόρισμα.

Πόρισμα 6.4 *Ισχύουν οι παρακάτω ταυτότητες*

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-b)(c-a)} = 1,$$

$$\frac{a^2(b+c)}{(a-b)(a-c-} + \frac{b^2(a+c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2(a+b)}{(c-b)(c-a)} = 0,$$

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-b)(c-a)} = 0.$$

Παράδειγμα 6.3 Να γραφτεί το x^3 ως γραμμικός συνδυασμός των x, $x(x-1)$, $x(x-1)(x-2)$. Δηλαδή να βρεθούν a, b, c τέτοια ώστε $x^3 = ax+bx(x-1)+cx(x-1)(x-2)$.

α′ τρόπος Εμφανίζουμε σταδιακά τα x, $x(x-1)$, $x(x-1)(x-2)$ αρχίζοντας από το υψηλόβαθμο:

$x^3 = (x^3-3x^2+2x)+3x^2-2x = x(x-1)(x-2)+3x^2-2x =$

$= x(x-1)(x-2)+3(x^2-x)+3x-2x = x(x-1)(x-2)+3x(x-1)+x$

Άρα $c=1$, $b=3$, $a=1$

β′ τρόπος Ψάχνουμε a, b, c τέτοια ώστε

$x^3 = ax+bx(x-1)+cx(x-1)(x-2) = ax+b(x^2-x)+c(x^3-3x^2+2x) = cx^3+(b-3c)x^2+(a-b+2c)x$

Άρα συγκρίνοντας τους συντελεστές παίρνουμε παίρνουμε το σύστημα

$c=1$

$b-3c=0$

$a-b+2c=0,$

το οποίο λύνουμε κατά τα γνωστά. Θα βρούμε $c=1$, $b=3$, $a=1$

6.3 Τύποι Vieta

Ήδη έχουμε δει τους τύπους του Vieta για την περίπτωση της δευτεροβάθμιας και της τριτοβάθμιας εξίσωσης. Τώρα θα τους γενικεύσουμε σε πολυώνυμα οποιουδήποτε βαθμού.

Έστω $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ πολυώνυμο βαθμού n. Ξέρουμε ότι έχει n (εν γένει μιγαδικές) ρίζες και ότι ισχύει

(1) $p(x) = a_n(x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_n)$

Επίσης ξέρουμε ότι αν p, q πολυώνυμα βαθμού $\leq n$, που είναι ίσα για $n+1$ διαφορετικές τιμές του x, τότε είναι εκ ταυτότητος ίσα και έχουν τους ίδιους συντελεστές.

Εκτελώντας τις πράξεις στην (1) παίρνουμε

$p(x) = a_n[x^n - (\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_n)x^{n-1} + (\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \cdots + \rho_{n-1}\rho_n)x^{n-2} + \cdots + (-1)^n \rho_1\rho_2 \cdots \rho_n]$

Συγκρίνοντας τους συντελεστές βρίσκουμε

$\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$

$\rho_1\rho_2 + \cdots + \rho_{n-1}\rho_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$

$$\begin{aligned} \rho_1\rho_2\rho_3 + \cdots + \rho_{n-2}\rho_{n-1}\rho_n &= -\tfrac{a_{n-3}}{a_n} \\ &\vdots \\ \rho_1\rho_2\cdots\rho_n &= (-1)^n \tfrac{a_0}{a_n} \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, αν ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 είναι οι ρίζες της $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

τότε $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 = -\frac{a_3}{a_4}$

$\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_1\rho_4 + \rho_2\rho_3 + \rho_2\rho_4 + \rho_3\rho_4 = \frac{a_2}{a_4}$

$\rho_1\rho_2\rho_3 + \rho_1\rho_2\rho_4 + \rho_1\rho_3\rho_4 + \rho_2\rho_3\rho_4 = -\frac{a_1}{a_4}$

$\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 = \frac{a_0}{a_4}$

Παράδειγμα 6.4 Αν a, b, c ρίζες της $x^3 + 7x^2 - 5x + 11 = 0$, να βρεθούν τα αθροίσματα $a^3 + b^3 + c^3$ και $a^4 + b^4 + c^4$

Λύση

Ξέρουμε ότι $a + b + c = -7$ και

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab + bc + ca) \\ &= 49 - 2(-5) = 49 + 10 = 59 \end{aligned}$$

Αφού $a^3 + 7a^2 - 5a + 11 = 0$, $b^3 + 7b^2 - 5b + 11 = 0$, $c^3 + 7c^2 - 5c + 11 = 0$, με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε

$(a^3 + b^3 + c^3) + 7(a^2 + b^2 + c^2) - 5(a + b + c) + 33 = 0$, άρα $a^3 + b^3 + c^3 + 7(59) - 5(-7) + 33 = 0$ οπότε τελικά $a^3 + b^3 + c^3 = -481$

Επίσης

$a^4 + 7a^3 - 5a^2 + 11a = 0$, $b^4 + 7b^3 - 5b^2 + 11b = 0$, $c^4 + 7c^3 - 5c^2 + 11c = 0$. Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε

$a^4+b^4+c^4+7(a^3+b^3+c^3)-5(a^2+b^2+c^2)+11(a+b+c)=0$, από όπου βρίσκουμε το $a^4+b^4+c^4$.

Παράδειγμα 6.5 Αν $\rho_1,\dots,\rho_n$ ρίζες του $a_nx^n+\cdots+a_0=0$, να βρεθούν συναρτήσει των συντελεστών τα

1. $\rho_1^2+\rho_2^2+\cdots+\rho_n^2$
2. $\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\cdots+\frac{1}{\rho_n}$ (όπου $\rho_1,\dots,\rho_n\neq 0$)

Λύση

1. $(\rho_1+\cdots+\rho_n)^2=\rho_1^2+\cdots+\rho_n^2+2(\rho_1\rho_2+\cdots+\rho_{n-1}\rho_n)$, άρα $\rho_1^2+\cdots+\rho_n^2=\left(-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2-2\left(\frac{a_{n-2}}{a_n}\right)=\frac{a_{n-1}^2a_n-2a_{n-2}}{a_n^2}$
2. **α′ τρόπος**
$$\frac{1}{\rho_1}+\cdots+\frac{1}{\rho_n}=\frac{\rho_2\rho_3\cdots\rho_n+\rho_1\rho_3\cdots\rho_n+\cdots+\rho_1\rho_2\cdots\rho_{n-1}}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n}=$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}\frac{a_1}{a_n}}{(-1)^n\frac{a_0}{a_n}}=-\frac{a_1}{a_0}.$$
β′ τρόπος

Είναι προφανές ότι η εξίσωση που έχει ρίζες τα $\frac{1}{\rho_1},\dots,\frac{1}{\rho_n}$ προκύπτει ως εξής: Αν x ρίζα της $a_nx^n+\cdots+a_0=0$,

θέτουμε $y=\frac{1}{x}$, ή $x=\frac{1}{y}$, οπότε προκύπτει η εξίσωση $a_n\left(\frac{1}{y}\right)^n+\cdots+a_1\left(\frac{1}{y}\right)+a_0=0$

δηλαδή $a_0y^n+a_1y^{n-1}+\cdots+a_n=0$.

Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης αυτής είναι $\frac{1}{\rho_1}+\cdots+\frac{1}{\rho_n}=-\frac{a_1}{a_0}$.

(Σημείωση: $a_0\neq 0$ διότι αν $a_0=0$, η αρχική εξίσωση θα ήταν η $a_nx^n+\cdots+a_1x=0$, άρα θα είχε ρίζα το 0, ενώ υποθέσαμε ότι $\rho_1,\dots,\rho_n\neq 0$).

6.4 Πολυώνυμα Lagrange

Να βρεθεί το πολυώνυμο P βαθμού ≤ 4 για το οποίο ισχύει
$$\begin{aligned} P(1) &= 32\\ P(2) &= 7\\ P(3) &= 4\\ P(4) &= 2\\ P(5) &= -3 \end{aligned}$$

Λύση

Προφανώς ένα τέτοιο πολυώνυμο είναι το P όπου

$$P(x)=32\frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)}+7\frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)}$$

$$+4\frac{(x-1)(x-2(x-4)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)}+2\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)}$$

$$-3\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}$$

Γενικά, αν $x_1,\ldots,x_n$ διαφορετικά ανά δύο, και $a_1,\cdots,a_n$ δοθείσες τιμές, τότε το πολυώνυμο P που έχει βαθμό $\leq n-1$ και ικανοποιεί τις σχέσεις $P(x_i)=a_i$ για $i=1,\,2,\,\ldots\,n$

είναι το

$$P(x)=a_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}+a_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)}$$

$$+\cdots+a_n\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}=\sum_{k=1}^{n}a_k\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}\frac{(x-x_n)}{(x_k-x_l)}$$

Παρατήρηση

Τέτοιο πολυώνυμο, δηλαδή βαθμού $\leq n-1$ με $p(x_i)=a_i$ για $i=1,\,2,\,\ldots\,,\,n)$ υπάρχει μόνον ένα. Πράγματι, αν p, q δύο πολυώνυμα βαθμού το πολύ $n-1$, με

$$\begin{array}{rcccl} p(x_1) &=& a_1 &=& q(x_1)\\ && \vdots && \\ p(x_n) &=& a_n &=& q(x_n)\end{array}$$

τότε είναι ίσα, αφού ταυτίζονται σε n τιμές.

6.5 Ανάλυση σε κλάσματα

Αποδεικνύεται ότι κάθε ρητή συνάρτηση (δηλαδή ένα πηλίκο δύο πολυωνύμων) της μορφής $\frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}$ όπου $a_1,\,a_2,\,a_3\cdots,a_n$ διαφορετικά ανά δύο και P πολυώνυμο βαθμού $<n$, αναλύεται σε άθροισμα της μορφής

$$\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots,\frac{A_n}{x-a_n}.$$

Αν το P έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο από τον βαθμό του παρανομαστή, τότε κάνουμε πρώτα την διαίρεση.

Παράδειγμα 6.6 Να αναλυθεί σε απλά κλάσματα η παράσταση

$$\frac{5x+3}{(x+1)(x-2)(x+3)}.$$

Λύση Σύμφωνα με την θεωρία υπάρχει ανάλυση της μορφής

$$\frac{5x+3}{(x+1)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}.$$

Τότε θα ισχύει $5x+3 = A(x-2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x-2)$ $(*)$. Από το σημείο αυτό έχουμε δύο τρόπους να συνεχίσουμε.

α΄ τρόπος Ανοίγοντας τις παρενθέσεις θα βρούμε

$5x+3 = A(x^2+x-6) + B(x^2+4x+3) + C(x^2-x-2)$ ή

$5x+3 = (A+B+C)x^2 + (A+4B-C)x + (-6A+3B-2C)$.

Συγκρίνοντας συντελεστές αναγόμαστε στην επίλυση του συστήματος

$A+B+C=0$

$A+4B-C=5$

$-6A+3B-2C=3$.

Αφού επιλύσουμε το σύστημα θα διαπιστώσουμε ότι, τελικά, $\dfrac{5x+3}{(x+1)(x-2)(x+3)} = \dfrac{1}{3(x+1)} + \dfrac{13}{15(x-2)} - \dfrac{6}{5(x+3)}$

β΄ τρόπος Αντί να λύσουμε το σύστημα, είναι απλούστερο να θέσουμε κατάλληλες τιμές στην μεταβλητή x. Πράγματι, αφού η $(*)$ ισχύει για κάθε x (δικαιολογείστε αυτόν τον ισχυρισμό) μπορούμε να θέσουμε διαδοχικά $x=-1$, $x=2$ και $x=-3$. θα βρούμε, αντίστοιχα,

$-2=-6A$, $13=15B$, $-12=10C$

από όπου έπονται αμέσως οι τιμές των A, B, C και καταλήγουμε στην ίδια ανάλυση σε κλάσματα.

Παράδειγμα 6.7 Να αναλυθεί σε απλά κλάσματα το $\dfrac{x^3+2}{x^2+x}$.

Λύση Έχουμε $x^3+2 = (x-1)(x^2+x) + x + 2$, άρα

$$\frac{x^3+2}{x^2+x} = x-1+\frac{x+2}{x^2+x} = x-1+\frac{x+2}{x(x+1)}$$

Αναλύουμε τώρα το $\frac{x+2}{x(x+1)}$ σε απλά κλάσματα. Η ανάλυση είναι της μορφής $\frac{x+2}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$ ή $x+2 = A(x+1) + Bx$.

- Θέτοντας $x=0$ παίρνουμε $2 = A\cdot 1 + 0$, άρα $A=2$.
- Θέτοντας $x=-1$ παίρνουμε $1 = 0 - B$, άρα $B=-1$,

δηλαδή $\frac{x+2}{x(x+1)} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1}$.

Τελικά $\frac{x^3+2}{x^2+x} = x-1+\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1}$

Πιο σύνθετες μορφές

Όταν στον παρονομαστή έχουμε δευτεροβάθμια πολυώνυμα που δεν παραγοντοποιούνται στο $\mathbb{R}$, τότε ή ανάλυση γίνεται όπως δείχνουν στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 6.8 Η ανάλυση σε απλά κλάσματα του αριστερού μέλους είναι όπως δείχνει το δεξί:

$\frac{1}{(x^2+x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x-2}$

Για να προσδιοριστούν οι συντελεστές, έχουμε

$1 = (Ax+B)(x-1)(x-2) + C(x^2+x+1)(x-2) + D(x^2+x+1)(x-1)$

α΄ τρόπος

Μπορούμε με σύγκριση συντελεστών να αναχθούμε στην επίλυση ενός 4×4 συστήματος. Αφήνουμε τις λεπτομέρειες στον αναγνώστη.

β΄ τρόπος

Θέτουμε $x = 1$ (γιατί επιτρέπεται;). Τότε παίρνουμε

$1 = 0 + 3(-1)C + 0$ άρα $C = -\frac{1}{3}$

Θέτοντας $x = 2$ παίρνουμε

$1 = 0 + 0 + (4+2+1)D$, άρα $D = \frac{1}{7}$.

Μετά, είτε βάζουμε τιμές της αρεσκείας μας στο x είτε συγκρίνοντας τους συντελεστές παίρνουμε σύστημα ως προς A, B, π.χ.

$0 = A + C + D$ άρα $A = \frac{1}{3} - \frac{1}{7}$ δηλαδή $A = \frac{4}{21}$.

Όμοια $2B - 2C - D = 1$ άρα $B = \frac{1}{2}(2C + D + 1) = \frac{5}{21}$

Παράδειγμα 6.9

$\frac{P_5(x)}{(x^2+x+1)(x^2+4x+7)(x-2)(x-3)}$. Αυτή η παράσταση αναλύεται σε κλάσματα της εξής μορφής.

$$\frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+7} + \frac{E}{x-2} + \frac{Z}{x-3}$$

Αν κάποιος όρος του παρανομαστή είναι $(x-a)^2$, τότε στην ανάλυση θα εμφανισθεί το κλάσμα $\frac{Ax+B}{(x-a)^2}$

Γλιτώνουμε κόπο αν γράψουμε

$\frac{Ax+B}{(x-a)^2} = \frac{A(x-a)+B'}{(x-a)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B'}{x-a}^2$.

Παράδειγμα 6.10

$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-2)} + \frac{D}{x-3}$

Άρα $1 = A(x-1)(x-2)(x-3) + B(x-2)(x-3) + C(x-1)^2(x-3) + D(x-1)^2(x-2)$

Θέτοντας $x = 1$ παίρνουμε $1 = 0 + (-1)(-2)B + 0 + 0$ άρα $B = \frac{1}{2}$.

Θέτοντας $x = 2$ παίρνουμε $1 = 0 + 0 + (1)^2(-1)C + 0$, άρα $C = -1$.

Θέτοντας $x = 3$ παίρνουμε $1 = 0 + 0 + 0 + 2^2 D$, άρα $D = \frac{1}{4}$.

Για το A, είτε θέτουμε κάποια άλλη τιμή στο x είτε συγκρίνουμε συντελεστές. Για παράδειγμα η σύγκριση των συντελεστών του x^3 δίνει $A + C + D = 0$, άρα $A = -C - D = \frac{3}{4}$.

Γενικότερα, αν στον παρανομαστή εμφανίζονται παράγοντες της μορφής $(x-a)^3$, $(x-a)^4, \ldots$, η ανάλυση έχει την εξής μορφή

$\frac{P_2(x)}{(x-a)^3} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-a)^3}$

$\frac{P_3(x)}{(x-a)^4} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-a)^3} + \frac{D}{(x-a)^4}$.

Ανάλογη ανάλυση επιτυγχάνεται αν στον παρανομαστή εμφανίζονται παράγοντες της μορφής $(x^2+ax+b)^k$, όπου το τριώνυμο έχει αρνητική ορίζουσα. Για παράδειγμα έχουμε την εξής ανάλυση:

$$\frac{x^8+3x+7}{(x^2+x+1)^3(x-1)^2(x+2)^3} =$$
$$\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2}+\frac{Ex+F}{(x^2+x+1)^3}+\frac{G}{x-1}+\frac{H}{(x-1)^2}+\frac{J}{x+2}+\frac{K}{(x+2)^2}+$$
$$\frac{L}{(x+2)^3}\ .$$

Κεφάλαιο 7

Αθροίσματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τεχνικές με τις οποίες βρίσκουμε αθροίσματα σε κλειστή μορφή. Τονίζουμε όμως ότι, εν γένει, η εύρεση τύπου σε κλειστή μορφή ενός αθροίσματος είναι δύσκολη υπόθεση με την έννοια ότι δεν μπορούμε πάντα να βρούμε τέτοια μορφή αλλά θα εργαστούμε με περιπτώσεις όπου η γραφή είναι εφικτή.

Για παράδειγμα για την γεωμετρική πρόοδο a, aq, aq^2, $\ldots$, aq^{n-1} έχουμε

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})$. Κάνοντας χρήση της ταυτότητας

$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1)$ έχουμε

Αν $q \neq 1$ τότε $S_n = \frac{a(q^n-1)}{q-1}$ ενώ $q = 1$, τότε $S_n = an$.

Ένας άλλος τρόπος να βρούμε το άθροισμα γεωμετρικής προόδου είναι ο εξής:

Έχουμε $S_n = 1 + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$ άρα

$qS_n = aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + aq^n$. Αφαιρώντας τις δύο τελευταίες προκύπτει

$qS_n - S_n = aq^n - a$ οπότε, για $q \neq 1$ είναι $S_n = \frac{a(q^n-1)}{q-1}$.

Θα μας είναι χρήσιμο να εισάγουμε τον συμβολισμό Σ για αθροίσματα: Γράφουμε

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

.

Για παράδειγμα

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = \sum_{k=1}^{10} a_k$$

Το k ονομάζεται *βουβός δείκτης* και μπορεί να αντικατασταθεί με όποιο άλλο γράμμα μας βολεύει όπως

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = \sum_{m=1}^{10} a_m = \sum_{p=1}^{10} a_p$$

και παρόμοια. Το ίδιο άθροισμα γράφεται και, για παράδειγμα,

$$\sum_{k=0}^{9} a_{k+1} \; \eta' \sum_{k=-7}^{2} a_{k+8}$$

.

Όμοια έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

και

$$\sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = a + aq + aq^2 + \; ... \; + a^{n-1}$$

Ομαδοποίηση

Η μέθοδος αυτή συνίσταται στο να ομαδοποιούμε τους όρους του αθροίσματος ώστε να προκύπτει απλούστερη παράσταση την οποία μπορούμε να χειριστούμε καλύτερα. Για παράδειγμα, στο επόμενο άθροισμα παίρνουμε τον πρώτο όρο μαζί με τον τελευταίο, το δεύτερο με τον προτελευταίο και ούτω καθεξής. Συγκεκριμένα, για να βρούμε το $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$, το γράφουμε ανάποδα,

$S_n = n + (n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1$ και προσθέτουμε κατά μέλη. Θα βρούμε

$2S_n = n(n+1)$, οπότε $S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Γενικότερα, για την αριθμητική πρόοδο a, $a+\delta$, $a+2\delta$, $\ldots$, $a+(n-1)\delta$ εφαρμόζουμε την ίδια τεχνική:

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ $a_n = a + (n-1)\delta$ και ανάποδα

$S_n = (a + (n-1)\delta) + \ldots\ (a+\delta) + a$ οπότε

$2S_n = n(2a + (n-1)\delta)$

Άρα $S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)\delta) = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$.

Παράδειγμα 7.1 Να βρεθεί το άθροισμα

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^{\frac{k}{n}}}{a^{\frac{k}{n}} + \sqrt{a}}$$

Γράφοντας το S_n ανάποδα και προσθέτοντας κατά μέλη εμφανίζονται όροι της μορφής

$\frac{a^{\frac{k}{n}}}{a^{\frac{k}{n}}+\sqrt{a}} + \frac{a^{\frac{n-k}{n}}}{a^{\frac{k}{n}}+\sqrt{a}} = \frac{2a+a^{\frac{k}{n}}\sqrt{a}+a^{\frac{n-k}{n}}\sqrt{a}}{2a+a^{\frac{k}{n}}\sqrt{a}+a^{\frac{n-k}{n}}\sqrt{a}} = 1$

Άρα $2S_n = n$, οπότε $S_n = \frac{1}{2}$.

τηλεσκοπική μέθοδος

Ένα από τα ενδιαφέροντα τεχνάσματα εύρεσης αθροισμάτων είναι η λεγόμενη τηλεσκοπική μέθοδος. Ας την δούμε πρώτα με ένα παράδειγμα, και συγκεκριμένα της εύρεσης του αθροίσματος .

Παράδειγμα 7.2 Να βρεθεί το $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

Ισχύει

$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Συνεπώς έχουμε διαδοχικά

$$\begin{array}{cc}
\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2} & a_1 = b_1 - b_2 \\[2ex]
\frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} & a_2 = b_2 - b_3 \\[2ex]
\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} & a_3 = b_3 - b_4 \\[2ex]
\vdots & \vdots \\[2ex]
\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} & a_n = b_n - b_{n+1}
\end{array}$$

.

Προσθέτοντας κατά μέλη, παρατηρούμε ότι έχουμε απλοποιήσεις (ο δεύτερος όρος κάθε γραμμής φεύγει με τον πρώτο της επόμενης). Τελικά θα βρούμε

$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

Στην γενική περίπτωση γράφουμε $a_k = b_k - b_{k+1}$ για κατάλληλα b_k. Τότε, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, η πρόσθεση κατά μέλη και οι απλοποιήσεις στην δεύτερη στήλη δίνουν

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 - b_{n+1}$.

Ας βρούμε για παράδειγμα το γνωστό μας άθροισμα

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k$$

με χρήση της τηλεσκοπικής μεθόδου:

Έχουμε $k = \frac{1}{2}k(k+1) - \frac{1}{2}(k-1)k$ οπότε $b_k = \frac{1}{2}k(k+1)$, συνεπώς

$$\sum_{k=1}^{n} k = b_1 - b_{n+1} = \frac{1}{2}(1-1) + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n+1)$$

.

Παράδειγμα 7.3 Θα βρούμε τώρα το άθροισμα $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ενώ παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε την τηλεσκοπική μέθοδο για το ίδιο άθροισμα.

α΄ τρόπος. Από την ταυτότητα $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ έχουμε διαδοχικά
$2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$
$3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$
$4^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$
$\vdots$
$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

Προσθέτοντας κατά μέλη παρατηρούμε ότι έχουμε πολλές απλοποιήσεις (οι όροι της αριστερής στήλης απλοποιούνται με όρους της δεξιάς, αλλά μία γραμμή παρακάτω). Θα καταλήξουμε στο

$(n+1)^3 = 1^3 + 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + n$ οπότε

$(n+1)^3 = 1 + 3S_n + 3 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n$ και άρα

$3S_n = (n+1)^3 - 1 - \frac{3}{2}n(n+1) - N = (n+1)\left((n+1)^2 - \frac{3}{2}n - 1\right) = (n+1)\left(n^2 + 2n - 1 - \frac{3}{2}n - 1\right) =$

$(n+1)\left(n^2 + \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$.

Τελικά συμπεραίνουμε ότι $S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

β΄ τρόπος Παρατηρούμε την ταυτότητα $3k^2 = \left(k + \frac{1}{2}\right)^3 - \left(k - \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}$

(έλεγχος: $\left(k + \frac{1}{2}\right)^3 - \left(k - \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{4} =$

$= \left(k^3 + 3k^2 \cdot \frac{1}{2} + 3k \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) - \left(k^3 - 3k^2 \cdot \frac{1}{2} + 3k \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{4} = 3k^2$)

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε τηλεσκοπικά

$3\sum_{k=1}^n k^2 = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^3 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{n}{4} = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$

από όπου το ζητούμενο.

Με την ευκαιρία προσθέτουμε ότι με παραλλαγή των δύο αυτών μεθόδων (αλλά και αλλιώς) μπορούμε να βρούμε τα αθροίσματα $S_{n,p} = \sum_{k=1}^n k^p$, όπου $p \in \mathbb{N}$. Θα περιγράψουμε την μέθοδο για την περίπτωση $p = 3$ (τις περιπτώσεις $p = 1$, $p = 2$ τις είδαμε).

Παράδειγμα 7.4 Να βρεθεί το άθροισμα $S_{n,3}$. Συγκεκριμένα να αποδειχθεί (χωρίς χρήση επαγωγής) ότι

$$S_{n,3} = \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

α΄ τρόπος Αρχίζουμε από την ταυτότητα $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$. Δίνει διαδοχικά

$2^4 = 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1$
$3^4 = 2^4 + 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1$
$4^4 = 3^4 + 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1$
$\vdots$
$(n+1)^4 = n^4 + 4 \cdot n^3 + 6n^2 + 4n + 1.$

Με πρόσθεση κατά μέλη μετά τις απλοποιήσεις και με χρήση των $S_{n,1}$, $S_{n,2}$, θα βρούμε

$(n+1)^4 = 1 + 4S_{n,3} + 6 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 4 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n$ οπότε

$4S_{n,3} = (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) =$

$= (n+1)\left((n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1\right) =$

$= (n+1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - n - 2n - 1) =$

$= (n+1)(n^3 + n^2) = n^2(n+1)^2$, από όπου το ζητούμενο.

β΄ τρόπος Παρατηρούμε ότι

$(k+\frac{1}{2})^4 - (k-\frac{1}{2})^4 =$

$\left(k^4 + 4k^3 \cdot \frac{1}{2} + 6k^2 \cdot \frac{1}{4} + 4k \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) - \left(k^4 - 4k^3 \cdot \frac{1}{2} + 6k^2 \cdot \frac{1}{4} - 4k \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) =$

$= 4k^3 + k.$

Διαδοχικά λοιπόν προκύπτει

$\left(1+\frac{1}{2}\right)^4 - \left(1-\frac{1}{2}\right)^4 = 4 \cdot 1^3 + 1$

$\vdots$

$\left(n+\frac{1}{2}\right)^4 - \left(n-\frac{1}{2}\right)^4 = 4n^3 + n$

και λοιπά, ως τηλεσκοπικό.

Ακολουθεί ένα πιο σύνθετο τηλεσκοπικό επιχείρημα.

Παράδειγμα 7.5 Να βρεθεί το $S_n = \frac{2}{1\cdot2\cdot3} + \frac{2}{2\cdot3\cdot4} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$

Λύση Με ανάλυση κλασμάτων έχουμε

$\frac{2}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x+1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x+1)}{x(x+1)(x+2)}$

Θέλουμε λοιπόν $2 = (x+1)(x+2)A + x(x+2)B + x(x+1)C$. Μπορούμε να προχωρήσουμε βάζοντας βολικές τιμές στο x όπως $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$, και να προσδιορίσουμε τα A, B, C. Χάριν παραδείγματος θα προχωρήσουμε με σύγκριση συντελεστών και επίλυση συστήματος. Έχουμε τότε

$2 = (x^2+3x+2)A + (x^2+2x)B + (x^2+x)C$

$= (A+B+C)x^2 + (3A+2B+C)x + 2A$ άρα

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+2B+C=0 \\ 2A=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+B+C=0 \\ 3+2B+C=0 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-C-1 \\ 3+2(-C-1)+C=0 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} B=-C-1 \\ C=1 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-2 \\ C=1 \\ A=1 \end{cases}$$

Τελικά $\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}$ οπότε

$\frac{2}{1\cdot2\cdot3} = \frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}$

$\frac{2}{2\cdot3\cdot4} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$

$\frac{2}{3\cdot4\cdot5} = \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}$

$\frac{2}{4\cdot5\cdot6} = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6}$
$\vdots$
$\frac{2}{(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{n-2} - \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n}$
$\frac{2}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1}$
$\frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}$.

Η πρόσθεση κατά μέλη δίνει απλοποιήσεις λίγο πιο σύνθετες από αυτές που είδαμε μέχρι τώρα. Συγκεκριμένα έχουμε απλοποιήσεις ανά τριάδες: Απλοποιούνται ο τελευταίος προσθετέος σε μία γραμμή με τον μεσαίο της επόμενης και τον πρώτο της μεθεπόμενης. Μετά τις πράξεις θα βρούμε

$2S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

και τελικά $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

Παράδειγμα 7.6. Να αποδειχθεί ο τύπος

$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1\cdot2 + 2\cdot3 + \cdots + n\cdot(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

Λύση Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε Επαγωγή, ωστόσο προτιμήσουμε δύο άλλους τρόπους (θεωρώντας, δηλαδή, ότι δεν μας έχει δοθεί το αποτέλεσμα και ζητάμε να το προσδιορίσουμε).

α′ τρόπος Η χρήση της ταυτότητας

$k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) - \frac{1}{3}(k-1)k(k+1)$

το καθιστά τηλεσκοπικό. Αφήνουμε τις λεπτομέρειες στον αναγνώστη.

β′ τρόπος Η ταυτότητα $k(k+1) = k^2 + k$ δίνει

$1\cdot2 = 1^2 + 1$
$2\cdot3 = 2^2 + 2$
$3\cdot4 = 3^2 + 3$
$\vdots$
$n(n+1) = n^2 + n$. Άρα με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε

$S_n = (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + (1 + 2 + \cdots + n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) =$
$= n(n+1)\left(\frac{2n+1+3}{6}\right) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

Παράδειγμα 7.7 Να βρεθεί το άθροισμα $S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 - (2n)^2$

Λύση Έχουμε

$S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 - (2n)^2$
$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2) - 2\left(2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2\right)$
$= \sum_{k=1}^{2n} k^2 - 8(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$

Αλλά $\sum_{k=1}^{2n} k^2 = \frac{1}{6}(2n)\left[(2n)+1\right]\left[2(2n)+1\right]$ οπότε

$S = \frac{1}{6}(2n)(2n+1)(4n+1) - 8\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = -n(2n+1)$

Κεφάλαιο 8

Τριγωνομετρία

Υπενθυμίζουμε ότι σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ορθή την Α, ορίζουμε

ημΓ=$\sin\Gamma = \frac{\gamma}{a}$

συνΓ=$\cos\Gamma = \frac{\beta}{a}$

εφΓ=$\tan\Gamma = \frac{\gamma}{\beta}$

σφΓ=$\cot\Gamma = \frac{\beta}{\gamma}$

τεμΓ =$\sec\Gamma = \frac{a}{\beta} = \frac{1}{\cos\Gamma}$ (τέμνουσα)

στεμΓ=$\cos ec\Gamma = \frac{a}{\gamma} = \frac{1}{\sin\Gamma}$ (συντέμνουσα)

Γράψαμε και την διεθνή ορολογία, sin, cos και λοιπά, την οποία θα ακολουθήσουμε στα παρακάτω.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

$\tan\Gamma\cot\Gamma = 1$,

$\tan\Gamma = \frac{\sin\Gamma}{\cos\Gamma}$, $\cot\Gamma = \frac{\cos\Gamma}{\sin\Gamma}$,

$\sin^2\Gamma + \cos^2\Gamma = 1$,

$\sin B = \sin(90^o - \Gamma) = \frac{\beta}{a} = \cos\Gamma, \cos B = \cos(90^o - \Gamma) = \sin\Gamma$,

$\tan B = \tan(90^o - \Gamma) = \frac{\beta}{\gamma} = \cot\Gamma$, $\cot B = \tan\Gamma$,

$\tan^2\Gamma + 1 = \frac{1}{\cos^2\Gamma} = \sec^2\Gamma$, $\cot^2\Gamma + 1 = \frac{1}{\sin^2\Gamma} = \cos ec^2\Gamma$,

$0 < \sin\Gamma < 1$, $0 < \cos\Gamma < 1$.

Είναι απλό να δούμε ότι ισχύει

ΓΩΝΙΕΣ	30^o	45^o	60^o
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Γενικότερα, με χρήση τριγωνομετρικού κύκλου, δηλαδή κύκλου ακτίνας 1, μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων σε ευρύτερα σύνολα: Αν $M(x_M, y_M)$ σημείο του τριγωνομετρικού κύκλου και $\angle xOM = \varphi$, θέτουμε $\sin\varphi =$

y_M, $\cos\varphi = x_M$. Ειδικά, οι ορισμοί αυτοί δίνουν $\sin 0^o = \cos 90^o = 0$, $\sin 90^o = \cos 0^o = 1$ και $0 \leq \sin\varphi \leq 1$, $0 \leq \cos\varphi \leq 1$.

Ως προς τα πρόσημα ισχύει

Τεταρτημόριο	sin	cos	tan	cot
I	$+$	$+$	$+$	$+$
II	$+$	$-$	$-$	$-$
III	$-$	$-$	$+$	$+$
IV	$-$	$+$	$-$	$-$

Από τον τριγωνομετρικό κύκλο βλέπουμε π.χ. τις ιδιότητες

$0 \leq \sin\varphi \leq 1$, $0 \leq \cos\varphi \leq 1$,

$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$, $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$,

$\sin(90^o + \varphi) = -\cos\varphi$,

$\cos(180^o + \varphi) = \cos(180^o - \varphi) = -\cos\varphi$,

$\tan(270^o + \varphi) = \tan(270^o - \varphi) = -\cot\varphi$.

Αν $\varphi = 360^o k + \vartheta$ τότε

$\sin\varphi = \sin\vartheta$, $\tan\varphi = \tan\vartheta$, $\cot\varphi = \cot\vartheta$

και πολλές άλλες παρόμοιες. Τις ταυτότητες αυτές δεν χρειάζεται να τις αποστηθίζουμε αλλά πρέπει, με χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου, να τις κατανοούμε ως σχεδόν αυτονόητες.

Μας είναι συχνά χρήσιμο να εργαζόμαστε σε ακτίνια. Υπενθυμίζουμε ότι μεταξύ μοιρών (μ) και ακτινίων (a) έχουμε την σχέση

$$\frac{a}{\pi} = \frac{\mu}{180}$$

Ειδικά, $360^o = 2\pi$, $270^o = \frac{3\pi}{2}$, $180^o = \pi$, $90^o = \frac{\pi}{2}$, $60^o = \frac{\pi}{3}$, $45^o = \frac{\pi}{4}$, $30^o = \frac{\pi}{6}$ ακτίνια, και λοιπά.

8.1 Επίλυση εξισώσεων

Τα ακόλουθα παραδείγματα δίνουν την μεθοδολογία για την επίλυση απλών τριγωνομετρικών εξισώσεων.

Παράδειγμα 8.1 Να επιλυθεί η εξίσωση $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Λύση Έχουμε $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{6}$ ή $(\tan 30^o)$ οπότε

$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $(2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$. Το ίδιο γράφεται πιο απλά

$x = \mu\pi + \frac{\pi}{6}$ $(\mu \in \mathbb{Z})$.

Παράδειγμα 8.2 Να επιλυθεί η εξίσωση $\cos(3x - \frac{\pi}{4}) = \sin(2x)$.

Λύση Η δοθείσα ισοδυναμεί με την $\cos(3x - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)$, οπότε

$3x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm (\frac{\pi}{2} - 2x)$. Εξετάζουμε τις δύο περιπτώσεις χωριστά.
α) $3x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Leftrightarrow 5x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{3\pi}{20}$, $(k \in \mathbb{Z})$ και
β) $3x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + 2x \Leftrightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$, $(k \in Z)$

8.2 Τριγωνομετρικές ταυτότητες

Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών

Από το σχολείο είναι γνωστό ότι
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad (1)$
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad (2)$
$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \quad (3)$
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad (4)$
Άμεσο πόρισμα αυτών είναι οι
$\sin 2\vartheta = 2\sin\vartheta\cos\vartheta$ και
$\cos 2\vartheta = \cos^2\vartheta - \sin\vartheta = 2\cos^2\vartheta - 1 = 1 - 2\sin^2\vartheta$.
Επίσης
$\sin 3\vartheta = \sin(2\vartheta + \vartheta) = \sin 2\vartheta \cos\vartheta + \cos 2\vartheta \sin\vartheta =$
$= 2\sin\vartheta\cos^2\vartheta + (1 - 2\sin^2\vartheta)\sin\vartheta = 2\sin\vartheta(1 - \sin^2\vartheta)\sin\vartheta =$
$= 3\sin\vartheta - 4\sin^3\vartheta$;
δηλαδή

$$\sin 3\vartheta = 3\sin\vartheta - 4\sin^3\vartheta$$

και όμοια

$$\cos 3\vartheta = 4\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta$$

Από τα δύο προηγούμενα έχουμε ακόμα ότι
$\tan 3\vartheta = \dfrac{\sin 3\vartheta}{\cos 3\vartheta} = \dfrac{3\sin\vartheta\cos^2\vartheta + (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\sin\vartheta}{4\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta)}$
$= \dfrac{3\tan\vartheta + (1 - \tan^2\vartheta)\tan\vartheta}{4 - 3(\tan^2\vartheta + 1)} = \dfrac{\tan\vartheta - \tan^3\vartheta}{1 - 3\tan^2\vartheta}$
Από τις παραπάνω μπορούμε να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς διαφόρων γωνιών.

Παράδειγμα 8.3 Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας 15^o.

Λύση $\sin 15^o = \sin(45^o - 30^o) = \sin 45^o \cos 30^o - \cos 45^o \sin 30^o = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. Όμοια τα $\cos 15^o$, $\tan 15^o$ και λοιπά.

Παράδειγμα 8.4 Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $\sin^4 15^o + \cos^4 15^o$.

Λύση Ένας τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο, αλλά ένας ίσως ευκολότερος τρόπος είναι από την ταυτότητα $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$, οπότε

$\sin^4 15^o + \cos^4 15^o = \left(\sin^2 15^o + \cos^2 15^o\right)^2 - 2\sin^2 15^o \cos^2 15^o =$
$= 1^2 - \frac{1}{2}\left(2\sin 15^o \cos 15^o\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 30^o = 1 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{8}.$

Παράδειγμα 8.5 Από τις $\sin 2\vartheta = 2\sin\vartheta\cos\vartheta$, $\cos 2\vartheta = \cos^2\vartheta - \sin\vartheta$ που είδαμε παραπάνω, έχουμε

$$\tan 2\vartheta = \frac{\sin 2\vartheta}{\cos 2\vartheta} = \frac{2\sin\vartheta\cos\vartheta}{\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta} = \frac{\frac{2\sin\vartheta\cos\vartheta}{\cos^2\vartheta}}{\frac{\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta}} = \frac{2\tan\vartheta}{1-\tan^2\vartheta}$$

Επίσης

$$\sin 2\vartheta = \frac{2\sin\vartheta\cos\vartheta}{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta} = \frac{2\tan\vartheta}{1+\tan^2\vartheta}.$$

$$\cos 2\vartheta = \frac{\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta} = \frac{1-\tan^2\vartheta}{1+\tan^2\vartheta}\ .$$

Μνημονικός Κανόνας Αν θέσουμε $t = \tan\vartheta$ οι προηγούμενοι τύποι γράφονται $\tan 2\vartheta = \frac{2t}{1-t^2}$, $\sin 2\vartheta = \frac{2t}{1+t^2}$ και $\cos 2\vartheta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Η χρήση ορθογωνίου τριγώνου με πλευρές $2t$, $1-t^2$, $1+t^2$ και οξεία γωνία 2ϑ δίνει έναν τρόπο εύκολης απομνημόνευσης των τύπων αυτών.

Παράδειγμα 8.6 Να βρεθούν τα $\sin 18^o$, $\cos 18^o$, $\tan 18^o$ και $\sin 72^o$, $\cos 72^o$, $\tan 72^o$.

Λύση Οι γωνίες 18^o και 72^o είναι συμπληρωματικές, όποτε $\sin 72^o = \cos 18^o$, $\cos 72^o = \sin 18^o$ και $\tan 72^o = \frac{1}{\tan 18^o}$. Συνεπώς μας αρκεί να προσδιορίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας των 18^o.

Αν $\vartheta = 18^o$ τότε $5\vartheta = 90$ οπότε $2\vartheta = 90 - 3\vartheta$ άρα $\sin 2\vartheta = \sin(90-3\vartheta) = \cos 3\vartheta$.

Συνεπώς $2\sin\vartheta\cos\vartheta = 4\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta$. Αλλά $\cos 18^o \neq 0$, οπότε

$2\sin\vartheta = 4\cos^2\vartheta - 3 = 4(1-\sin^2\vartheta) - 3 = 1 - 4\sin^2\vartheta$, δηλαδή $4\sin^2\vartheta + 2\sin\vartheta - 1 = 0$. Λύνοντας την δευτεροβάθμια προκύπτει

$\sin\vartheta = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. Όμως $\sin 18^o > 0$ οπότε τελικά $\sin 18^o = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72^o$ και

$$\cos 18^o = +\sqrt{1-\sin^2 18^o} = \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \sin 72^o.$$

Το $\tan 18^o = \frac{\sin 18^o}{\cos 18^o}$ είναι τώρα απλό.

Ας σημειωθεί ότι με χρήση των προηγουμένων έχουμε ακόμα

$\sin 36^o = 2\sin 18^o \cos 18^o = \ldots = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \cos 54^o$ και όμοια βρίσκουμε τα $\cos 36^o$, $\tan 36^o$.

Άθροισμα τριγωνομετρικών αριθμών

Από τις (1) έως (4) έχουμε και τις

$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b \quad (5)$

$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a\sin b \quad (6)$

$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a cos b \quad (7)$

$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a\sin b (8)$

Από την (5) και, αντίστοιχα, την (7) συμπεραίνουμε
$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
και όμοια βρίσκουμε ταυτότητες από τις (6) και (8).

Παράδειγμα 8.7 Να αποδειχθεί ότι $\sin 70^o + \sin 10^o = \sqrt{3}\sin 40^o$.
Λύση Έχουμε $\sin 70^o + \sin 10^o = 2\sin\frac{70+10}{2}\cos\frac{70-10}{2} =$
$= 2\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 40^o = \sqrt{3}\sin 40^o$

Παράδειγμα 8.8 Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\sin\vartheta + 2\sin 5\vartheta + \sin 9\vartheta}{\cos\vartheta + 2\cos 5\vartheta + \cos 9\vartheta} = \tan 5\vartheta$$

Λύση Το αριστερό μέλος ισούται με $\dfrac{2\sin\frac{\vartheta+9\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta-9\vartheta}{2} + 2\sin 5\vartheta}{\cos\frac{\vartheta+9\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta-9\vartheta}{2} + 2\cos 5\vartheta} =$

$$= \frac{2\sin 5\vartheta\cos 4\vartheta + 2\sin 5\vartheta}{2\cos 5\vartheta\cos 4\vartheta + 2\cos 5\vartheta} = \frac{2\sin 5\vartheta(\cos 4\vartheta + 1)}{2\cos 5\vartheta(\cos 4\vartheta + 1)} =$$

$$= \frac{2\sin 5\vartheta}{2\cos 5\vartheta} = \frac{\sin 5\vartheta}{\cos 5\vartheta} = \tan 5\vartheta$$

8.3 Αντίστροφες τριγωνομετρικές

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση ημίτονο από το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ στο $[-1, 1]$ είναι 1-1 και επί. Άρα αντιστρέψιμη. Την αντίστροφη την ονομάζουμε *τόξο ημιτόνου*, συμβολικά Τοξημ (με κεφαλαίο Τ) ή Arcsin (με κεφαλαίο Α). Με άλλα λόγια

$Arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ με

$Arcsinx = y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow x = \sin y$.

Π.χ. $Arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ διότι $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ και $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Γενικά υπάρχουν πολλές γωνίες y με $\sin y = x$. Μια είναι η $Arcsinx$ και γενικά οι $k\pi + (-1)^k Arcsinx$, $k \in \mathbb{Z}$. Όλες μαζί αυτές τις γωνίες τις συμβολίζουμε τοξημx (πεζό τ) ή arcsinx (πεζό a). Δηλαδή η arcsin είναι πλειότιμη συνάρτηση, μία από τις τιμές της οποίας είναι η αντίστοιχη Arcsin. Για τον λόγο αυτό λέμε ότι η Arcsin είναι ο *κύριος κλάδος της αντίστροφης του ημιτόνου.*

Όμοια, η συνημίτονο από $[0, \pi] \to [-1, 1]$ είναι αντιστρέψιμη. Την αντίστροφη την ονομάζουμε *τόξο συνημιτόνου*, συμβολικά Τοξσυν ή Arccos. Συμβολίζουμε με arccosx όλες τις γωνίες που έχουν συνημίτονο ίσο με το x και ειδικά ονομάζουμε την Arccos ως τον κύριο κλάδο της αντίστροφης του συνημιτόνου..

Π.χ. $Arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$ διότι $\frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$ και $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Επίσης είναι $arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$

Όμοια ορίζουμε το *τόξο εφαπτομένης*, συμβολικά Τοξεφ ή Arctan, ως την αντίστροφη της εφαπτομένης από το $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ και με $\arctan x$ συμβολίζουμε όλες τις γωνίες που έχουν εφαπτομένη ίση με x.

Π.χ. $Arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ διότι $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Ανάλογα έχουμε $Arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ και $Arctan 0 = 0$.

Παράδειγμα 8.9 Από το ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές 3, 4, και 5, έπεται ότι $Arcsin\frac{4}{5} = Arccos\frac{3}{5} = Arctan\frac{4}{3}$. (Οι σχέσεις αυτές όλες εκφράζουν την γωνία απέναντι από την πλευρά μήκους 4).

Παράδειγμα 8.10 Για κάθε $x \in [-1, 1]$ ισχύει $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ (και εννοούμε ότι το $\frac{\pi}{2}$ είναι μια από τις τιμές).

Απόδειξη Έστω $y = arcsinx$ (*). Τότε $x = \sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$, άρα $\frac{\pi}{2} - y = \arccos x$ (**). Προσθέτοντας κατά μέλη τις (*) και (**) προκύπτει

$\arcsin x + arccosx = y + \left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \frac{\pi}{2}$.

□

Παράδειγμα 8.11 Ισχύει $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

Απόδειξη Έστω $y = \arctan\frac{1}{2}$ και $z = \arctan\frac{1}{3}$. Άρα $\tan y = \frac{1}{2}$ και $\tan z = \frac{1}{3}$, οπότε

$\tan(y+z) = \dfrac{\tan y + \tan z}{1 - \tan y \tan z} = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = 1$. Δηλαδή $\tan(y+z) = 1$ άρα $y + z = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, όπως θέλαμε.

□

Ας δούμε παραδείγματα με κύριες τιμές

Παράδειγμα 8.12 Είδαμε ότι $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$. Θα δούμε τώρα ότι, ακριβέστερα, $Arctan\frac{1}{2} + Arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

Απόδειξη Η απόδειξη είναι ουσιαστικά η ίδια, με μόνη διαφορά ότι έχουμε να εξετάσουμε και τα πεδία ορισμού των κύριων κλάδων.

Εξ ορισμού το $Arctan$ είναι συνάρτηση από το $\mathbb{R}$ στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Τώρα, έστω $y = Arctan\frac{1}{2}$ άρα $\tan y = \frac{1}{2}$ και $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ειδικότερα, αφού $0 < \frac{1}{2} < 1$ και η εφαπτομένη είναι αύξουσα, έχουμε $0 < y < \frac{\pi}{4}$.

Όμοια, αν $z = Arctan\frac{1}{3}$, έχουμε $\tan z = \frac{1}{3}$ και $0 < z < \frac{\pi}{4}$.

Άρα $0 < y + z < \dfrac{\pi}{2}$, που σημαίνει ότι $y + z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Έχουμε ακόμη ότι $\tan(y+z) = \frac{\tan y + \tan z}{1 - \tan y \tan z} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$. Εξ ορισμού, λοιπόν, $y + z = Arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, από όπου το αποδεικτέο.

□

Παράδειγμα 8.13 Ισχύει $\arctan\frac{2}{3}+\arctan\frac{1}{5}=\frac{\pi}{4}$.

Απόδειξη Μπορούμε να κάνουμε παρόμοια απόδειξη με του Παραδείγματος 7.10, αλλά ας δούμε μία λίγο διαφορετική. Θα δείξουμε το ισοδύναμο $\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{2}{3}+\arctan\frac{1}{5}$.

Έστω $y=\arctan\frac{2}{3}$. Τότε $\tan y=\frac{2}{3}$ και άρα

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-y\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan y}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan y}=\frac{1-\frac{2}{3}}{1+1\cdot\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{1}{5}$$

δηλαδή $\frac{\pi}{4}-y=\arctan\frac{1}{5}$, που ισοδυναμεί με το αποδεικτέο.

□

Παράδειγμα 8.14 Ισχύει $2\arctan\frac{1}{2}=\arctan\frac{4}{3}$.

Απόδειξη Έστω $y=\arctan\dfrac{1}{2}$, οπότε $\tan y=\frac{1}{2}$. Είναι τότε

$$\tan(2y)=\frac{2\tan y}{1-\tan y}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}.$$

Άρα $2y=\arctan\frac{4}{3}$, το οποίο γράφεται $2\arctan\frac{1}{2}=\arctan\frac{4}{3}$.

□

Ακολουθεί άλλο ένα παράδειγμα με κύριο κλάδο.

Παράδειγμα 8.15 Ισχύει $2Arctan2+Arctan3=\pi+Arctan\frac{1}{3}$.

Απόδειξη Θέτουμε $y=Arctan2$ και $z=Arctan3$. Άρα $\tan y=2$ και $\tan z=3$. Επίσης, αφού $1<2<3$ και $1<3<\infty$, έχουμε $\frac{\pi}{4}<y<\frac{\pi}{2}$ και $\frac{\pi}{4}<z<\frac{\pi}{2}$. Συνεπώς $\frac{3\pi}{4}<2y+z<\frac{3\pi}{2}$ (*).

Υπολογίζουμε τώρα το $\tan 2y$ γιατί θα μας χρειαστεί παρακάτω. Είναι

$$\tan 2y=\frac{2\tan y}{1-\tan^2 y}=\frac{2\cdot 2}{1-4}=-\frac{4}{3}.$$

Έχουμε λοιπόν,

$$\tan(2y+z)=\frac{\tan 2y+\tan z}{1-\tan 2y\tan z}=\frac{\frac{-4}{3}+3}{1+\frac{4}{3}\cdot 3}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{1}}=\frac{1}{3}.$$

Προσοχή σε αυτό το σημείο, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $2y+z=Arctan\frac{1}{3}$ γιατί το $Arctan$, ως κύριος κλάδος, έχει σύνολο τιμών $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, ενώ η (*) μας δίνει ότι $\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}<2y+z$. Προφανώς, όμως, η μία και μοναδική γωνία ϑ στο διάστημα $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$ με $\tan\theta=\frac{1}{3}$ είναι η $\pi+Arctan\frac{1}{3}$, από όπου έπεται το ζητούμενο.

□

8.4 Τριγωνομετρική λύση τριτοβάθμιας

Στο Κεφάλαιο 4 είδαμε αλγεβρικό τρόπο επίλυσης της τριτοβάθμιας εξίσωσης. Παρουσιάζουμε τώρα και μία τριγωνομετρική αντιμετώπιση. Χάριν ευκολίας, θα αναπτύξουμε την μέθοδο με συγκεκριμένο παράδειγμα. Περίπτωση $P < 0$ **1ο βήμα** Με αλλαγή μεταβλητής φέρνουμε την τριτοβάθμια σε μορφή χωρίς τον όρο x^2 και με συντελεστή του x^3 την μονάδα. Η μέθοδος που ακολουθεί προσαρμόζεται σε όλες τις $x^3 + Px + Q = 0$ με $P < 0$. Λόγου χάρη, ας υποθέσουμε ότι καταλήξαμε στην εξίσωση $x^3 - 3x + 1 = 0$.

1ο βήμα Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $\sin 3\vartheta = 3\sin\vartheta - 4\sin^3\vartheta$ στην ισοδύναμη μορφή του $4\sin^3\vartheta - 3\sin\vartheta + \sin 3\vartheta = 0$ (*)

Για την $x^3 - 3x + 1 = 0$ κάνουμε τον μετασχηματισμό $x = 2a\sin\vartheta$. Το a θα είναι παράμετρος που θα την επιλέξουμε αμέσως από κάτω και το ϑ θα γίνει ο άγνωστός μας.

Η εξίσωση γίνεται

$8a^3\sin^3\vartheta - 6a\sin\vartheta + 1 = 0$, ισοδύναμα

$4\sin^3\vartheta - \frac{3}{a^2}\sin\vartheta + \frac{1}{2a^3} = 0$.

Επιλέγουμε το a ώστε ο συντελεστής $\frac{3}{a^2}$ να ισούται με 3. Εδώ $a = 1$. Η εξίσωση τώρα γίνεται $4\sin^3\vartheta - 3\sin\vartheta + \frac{1}{2} = 0$. Συγκρίνοντας με την (*), το ϑ ικανοποιεί $\sin 3\vartheta = \frac{1}{2}$.

Έτσι $\sin 3\vartheta = \sin\frac{\pi}{6}$, οπότε

$3\vartheta = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$. Ειδικά για $k = 0$ έχουμε

$3\vartheta = \frac{\pi}{6}$, οπότε $\vartheta = \frac{\pi}{18}$.

Τελικά, μια λύση η $x = 2\sin\vartheta = 2\sin\frac{\pi}{18}$

Άλλες πραγματικές λύσεις, αν υπάρχουν, προκύπτουν από τα $k = 1$, $k = 2$. (Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, τα $k = 1$, $k = 2$ οδηγούν στην ίδια λύση).

Παράδειγμα 8.16 Να επιλυθεί η $x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0$.

Λύση Θέτουμε, όπως πριν, $x = 2a\sin\vartheta$ και κατόπιν επιλέγουμε, σε αυτή την περίπτωση, $a = 1$. Θα βρούμε $8\sin^3\vartheta - 6a\sin\vartheta + \frac{1}{2} = 0$, οπότε

$4\sin^3\vartheta - 3\sin\vartheta + \frac{1}{4} = 0$.

Συνεπώς $\sin 3\vartheta = \frac{1}{4}$ (**), άρα

$3\vartheta = arc\sin\frac{1}{4}$, οπότε $\vartheta = \frac{1}{3}arc\sin\frac{1}{4}$

Συμπεραίνουμε την λύση η $x = 2\sin\vartheta = 2\sin\left(\frac{1}{3}arc\sin\frac{1}{4}\right)$.

Αν θέλαμε κατά προσέγγιση αριθμητική τιμή της ρίζας, θα λέγαμε ότι από την (**) έχουμε

$\sin 3\vartheta \cong \sin 14^o30'$, άρα $3\vartheta \cong 14^o30'$ που δίνει $\vartheta \cong 4^o50'$. Οπότε η λύση είναι $x = 2\sin\vartheta \cong 2\sin(4^o50') \cong 2 \times 0,0842 = 0,1684$.

Το αφήνουμε ως άσκηση για την περίπτωση $P > 0$.

Κεφάλαιο 9

Ανισότητες

Ήδη γνωρίσαμε ορισμένες ανισότητες στο Κεφάλαιο 2. Τώρα θα συνεχίσουμε με άλλες.

9.0.1 Ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού Μέσου

Υπενθυμίζουμε ότι ο αριθμητικός μέσος A, ο γεωμετρικός μέσος G και ο αρμονικός μέσος H των αριθμών $a_1, a_2, \dots, a_n$ ορίζονται ως

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ (για $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$) και
$H = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$ (για $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$).

Η ανισότητα του Αριθμητικού-Γεωμετρικού-Αρμονικού μέσου (συνοπτικά ΑΜ-ΓΜ) λέει ότι για γνήσια θετικές ποσότητες a_k, $(1 \leq k \leq n)$ ισχύει $A \geq G \geq H$ με ισότητα αν και μόνον αν όλοι οι αριθμοί a_k είναι ίσοι μεταξύ τους. Ας σημειωθεί ότι ήδη έχουμε δει τις ειδικές περιπτώσεις για $n = 2$ και $n = 3$, δηλαδή τις
$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$
$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ όπου a, b, c θετικοί.

Θεώρημα 9.1 *Αν $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ τότε*
$$\frac{a_1 + a_2 + \dots \cdot + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$
ή αλλιώς $A \geq G \geq H$, με ισότητα αν και μόνον αν $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Πρώτα θα αποδείξουμε, με χρήση επαγωγής, ένα χρήσιμο λήμμα.

Λήμμα Αν $a_1, \cdots, a_n \geq 0$ με $a_1 a_2 a_3 \dots a_n = 1$ τότε $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$.

Απόδειξη Η περίπτωση $n = 1$ είναι άμεση. Για $n = 2$ η υπόθεση γράφεται $a_1 a_2 = 1$. Τότε έχουμε $a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2} = 2$, όπως θέλαμε.

Έστω ότι ισχύει το Λήμμα για $n = k$, δηλαδή έστω ότι όποτε $a_1, \dots, a_k \geq 0$ με $a_1 a_2 \cdots a_k = 1$, τότε $a_1 + \cdots + a_k \geq k$. Θα δείξουμε ότι αν $b_1, \dots, b_{k+1} \geq 0$ με $b_1 b_2 \cdots b_{k+1} = 1$ τότε $b_1 + b_2 + \cdots + b_{k+1} \geq k + 1$

Αφού το γινόμενο των $b_1 \cdots b_{k+1}$ ισούται με 1, κάποιοι από αυτούς τους παράγοντες θα είναι ≥ 1 ενώ κάποιοι άλλοι είναι ≤ 1. Χωρίς βλάβη στην γενικότητα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $b_k \geq 1 \geq b_{k+1}$, άρα $(b_k - 1)(1 - b_k) \geq 0$ (ως γινόμενο θετικών).

Εξετάζουμε τώρα τους k αριθμούς $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ... $a_{k-1} = b_{k-1}$, $a_k = b_k b_{k+1}$. Παρατηρούμε ότι $a_1 a_2 \cdots a_k = b_1 b_2 \cdots b_{k-1}(b_k b_{k+1}) = 1$.

Εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση στους k αριθμούς $a_1, ..., a_k$ έχουμε

$b_1 + b_2 + \cdots + b_{k-1} + (b_k b_{k+1}) \geq k$. Άρα

$b_1 + b_2 + \cdots + b_{k-1} + b_k + b_{k+1} = (b_1 + b_2 + \cdots + b_{k-1} + b_k b_{k+1}) + b_k + b_{k+1} - b_k b_{k+1}$

$\geq k + b_k + b_{k+1} - b_k b_{k+1}$

$= k + 1 + b_k + b_{k+1} - b_k b_{k+1} - 1$

$= k + 1 + (b_k - 1)(1 - b_{k+1})$

$\geq k + 1$, όπως θέλαμε.

Επιστρέφουμε στο θεώρημα. Έστω λοιπόν $a_1, \dots, a_n > 0$. Θέτουμε

$p_1 = \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}$, $p_2 = \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}, \dots, p_n = \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}$

Παρατηρούμε ότι $p_1 p_2 \cdots p_n = 1$. Από το λήμμα έχουμε

$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n \geq n$ δηλαδή

$\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} \geq n$, που ισοδυναμεί με την αριστερή ανισότητα, δηλαδή την $A \geq G$.

Για την $G \geq H$ εφαρμόζουμε αυτήν που μόλις δείξαμε, αλλά στους αριθμούς $\frac{1}{a_1}, \cdots \frac{1}{a_n}$. Έχουμε τότε

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdots \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}$$

που γράφεται $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \geq \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$ ή $G \geq H$.

□

Ας δούμε μερικές εφαρμογές:

Παράδειγμα 9.1

Αν $a, b, c \geq 0$ τότε

$a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) \geq 6abc$

Απόδειξη Ανοίγοντας τις παρενθέσεις τότε από την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ για 6 όρους έχουμε ότι το αριστερό μέλος ισούται

$a^2 b + a^2 c + b^2 c + b^2 a + c^2 a + c^2 b \geq 6\sqrt[6]{a^2 b a^2 c b^2 c b^2 a c^2 a c^2 b} = 6abc.$

□

Παράδειγμα 9.2 Για $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

Λύση Από την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ έχουμε
$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n}\right)^n = \left(\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Παράδειγμα 9.3 Αν $a_1 \ldots a_n > 0$, και $b_1,\ b_2,\ \cdots b_n$ αναδιάταξή τους, τότε $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geq n$

Λύση Είτε από το παραπάνω λήμμα είτε από την ίδια την ΑΜ-ΓΜ έχουμε
$\frac{\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdots \frac{a_n}{b_n}} = 1$ (εξηγείστε την τελευταία ισότητα!).

Παράδειγμα 9.4 Σε κάθε τρίγωνο το εμβαδόν του Ε ικανοποιεί
$E \leq \frac{\tau^2}{3\sqrt{3}}$ με ισότητα στο ισόπλευρο τρίγωνο, όπου $\tau = \frac{1}{2}(a+b=c)$ η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

Λύση Από τον τύπο του Ήρωνα έχουμε
$E = \sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-b)(\tau-c)} = \tau^{\frac{1}{2}}\sqrt{(\tau-a)(\tau-b)(\tau-c)}$
που με χρήση της ανισότητας του ΑΜ-ΓΜ δίνει
$E \leq \tau^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{\tau-a+\tau-b+\tau-c}{3}\right)^3} = \tau^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{3\tau-2\tau}{3}\right)^3} = \frac{\tau^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3^3}} = \frac{\tau^2}{3\sqrt{3}}$.

9.0.2 Ανισότητα Cauchy - Schwarz

Στο Κεφάλαιο 2 είδαμε τις ανισότητες $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$ και $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$.

Οι ανισότητες αυτές είναι ειδικές περιπτώσεις της ανισότητας Cauchy-Schwarz, που είναι μία από τις σημαντικότερες ανισότητες των πραγματικών αριθμών. Συγκεκριμένα,

Θεώρημα 9.2 *Αν $a_1, \ldots, a_n,\ b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, τότε*
$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$.
Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \cdots = \frac{b_n}{a_n}$ (στην περίπτωση που όλοι οι a_k είναι διάφοροι του 0) ή $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Απόδειξη Χωρίς βλάβη μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλα τα a_k ικανοποιούν $a_k \neq 0$ (αλλιώς τους σβήνουμε, χωρίς να επηρεάζεται η ανισότητα). Θέτουμε $A = a_1^2+\cdots+a_n^2$, $B = b_1^2+\cdots+b_n^2$ και $C = a_1b_1+\cdots+a_nb_n$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $AB \geq C^2$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
$Ax^2 - 2Cx + B = (a_1^2+\cdots+a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)x + (b_1^2+\cdots+b_n^2) = (a_1^2x^2 - 2a_1b_1x + b_1^2) + (a_2^2x^2 - 2a_2b_2x + b_2^2) + \cdots + (a_n^2x^2 - 2a_nb_nx + b_n^2) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x-b_2)^2 + \cdots + (a_nx-b_n)^2 \geq 0$.

Αν $A \neq 0$, η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική ή μηδέν, άρα $AB \geq C^2$. Η ορίζουσα είναι 0 αν και μόνον αν υπάρχει ρίζα του τριωνύμου. Αυτό συμβαίνει ακριβώς όταν $\frac{b_1}{a_1} = \cdots = \frac{b_n}{a_n}$.

□

Ας δούμε μερικά ακόμα παραδείγματα.

Παράδειγμα 9.5

Αν $a_k \geq 0$ και $a_1 + \cdots + a_n = 1$, τότε $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geq \frac{1}{n}$.

Λύση Έχουμε

$1 = 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + \cdots + 1 \cdot a_n \leq (1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2)(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$

9.0.3 Ανισότητες Jensen

Οι ανισότητες Jensen εφαρμόζονται σε κοίλες συναρτήσεις, δηλαδή συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την $\frac{f(x)+f(y)}{2} \leq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ για κάθε x, y ή, αντίστοιχα, σε κυρτές, δηλαδή σε συναρτήσεις με $\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ για κάθε x, y. Γεωμετρικά, μία συνάρτηση είναι κοίλη (αντίστοιχα, κυρτή) αν το μέσον κάθε χορδής του γραφήματός της είναι χαμηλότερα (αντίστοιχα, ψηλότερα) από την τιμή της στο μέσον των των τετμημένων των άκρων. Στην περίπτωση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, ο Απειροστικός Λογισμός δίνει ένα χρήσιμο κριτήριο για να διακρίνουμε αν μία συνάρτηση είναι κοίλη ή, αντίστοιχα, κυρτή: Αν η f' είναι φθίνουσα τότε η f είναι κοίλη (όμοια για τις κυρτές, αλλά απαιτούμε αύξουσα f'). Αν υπάρχει δεύτερη παράγωγος, μία συνάρτηση είναι κοίλη αν $f''(x) \leq 0\ \forall x$ (για κυρτές, η συνθήκη γίνεται $f''(x) \geq 0$, $\forall x$),

Θεώρημα 9.3 *Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κοίλη, $\frac{f(x)+f(y)}{2} \leq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ για κάθε x, y, τότε για κάθε x_1, x_2, $\cdots$ x_n ισχύει*

$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$

Γενικότερα, αν $p_1, \ldots, p_n > 0$ με $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ τότε

$p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \cdots + p_n f(x_n) \leq f(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n)$

Όμοια για κυρτές συναρτήσεις, αλλά με τις ανισότητες ανάποδα.

Απόδειξη Θα εργαστούμε με Μαθηματική Επαγωγή. Πρώτα δείχνουμε $n \Rightarrow 2n$ και μετά $n \Rightarrow n-1$.

$\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)}{2} \leq f\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}\right) = f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)$,

$\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_8)}{8} = \frac{\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_4)}{4}+\frac{f(x_5)+\cdots+f(x_8)}{4}}{2} \leq$

$\frac{f\left(\frac{x_1+\cdots+x_4}{4}\right)+f\left(\frac{x_5+\cdots+x_8}{4}\right)}{2} = f\left(\frac{\frac{x_1+\cdots+x_4}{4}+\frac{x_5+\cdots+x_8}{4}}{2}\right) =$

$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_8}{8}\right)$ και όμοια η γενική περίπτωση $n \Rightarrow 2n$.

Παρατηρείστε ότι η επαγωγή αυτή δείχνει την αλήθεια του ισχυρισμού για $n = 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \ldots, 2^n, \ldots$. Για τους υπόλοιπους θα δείξουμε ότι αν $\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)$ για κάθε $x_1,\ \ldots,\ x_n$ τότε για κάθε $y_1, \ldots,\ y_{n-1}$ ισχύει $\frac{f(y_1)+\cdots+f(y_{n-1})}{n-1} \leq f\left(\frac{y_1+\cdots+y_{n-1}}{n-1}\right)$.

Θέτουμε

$x_1 = y_1$

$x_2 = y_2$

$\vdots$

$x_{n-1} = y_{n-1}$

$x_n = \frac{y_1+\cdots+y_{n-1}}{n-1}$. Τότε από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$\frac{f(y_1)+\cdots+f(y_{n-1})+f\left(\frac{y_1+\cdots+y_{n-1}}{n-1}\right)}{n} \leq$

$\leq f\left(\frac{y_1+\cdots+y_{n-1}+\frac{y_1+\cdots+y_{n-1}}{n-1}}{n}\right) =$

$= f\left(\frac{(n-1)(y_1+\cdots+y_{n-1})+(y_1+\cdots+y_{n-1})}{n(n-1)}\right) =$

$= f\left(\frac{n(y_1+\cdots+y_{n-1})}{n(n-1)}\right) = f\left(\frac{y_1+\cdots+y_{n-1}}{n-1}\right)$

Οπότε

$\frac{f(y_1)+\cdots+f(y_{n-1})}{n} \leq \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot f\left(\frac{y_1+\cdots+y_{n-1}}{n-1}\right) =$

$= \frac{n-1}{n} \cdot f\left(\frac{y_1+\cdots+y_{n-1}}{n-1}\right)$,

από όπου έπεται το αποδεικτέο.

$\square$

Παράδειγμα 9.6 Σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\sin A + \sin B + \sin \Gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

και, αν είναι οξυγώνιο, ισχύει

$\cos A + \cos B + \cos \Gamma \leq \frac{3}{2}$

$\tan A + \tan B + \tan \Gamma \geq 3\sqrt{3}$

Απόδειξη

Η ημίτονο στο $[0,\ \pi]$ είναι κοίλη, οπότε από την ανισότητα Jensen έχουμε

$\frac{\sin A+\sin B+\sin \Gamma}{3} \leq \sin\left(\frac{A+B+\Gamma}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

άρα $\sin A + \sin B + \sin \Gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Η συνημίτονο είναι κοίλη στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ άρα

$\frac{\cos A+\cos B+\cos \Gamma}{3} \leq \cos\left(\frac{A+B+\Gamma}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, από όπου το ζητούμενο.

Όμοια, η εφαπτόμενη στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ είναι κυρτή, άρα

$\frac{\tan A+\tan B+\tan \Gamma}{3} \geq \tan\frac{A+B+\Gamma}{3} = \tan\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, και λοιπά.

$\square$

Παράδειγμα 9.7 Για $x_k \in [0,\ \pi]$, $(1 \leq k \leq n$ ισχύει

$\frac{\sin x_1+\cdots+\sin x_n}{n} \leq \sin\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)$

Λύση Το αποδεικτέο είναι άμεσο από την ανισότητα Jensen, δεδομένου ότι η sin ε;ναι κοίλη στο διάστημα αναφοράς.

Παράδειγμα 9.8 Αν a, $b > 0$ τότε
$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$

Λύση Από Jensen στην κυρτή $f(x) = x^n$, έχουμε $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$, που είναι η αποδεικτέα.

Παράδειγμα 9.9 Αν x, $y > 0$ και $0 < R < 1$, τότε
$x^R y^{1-R} \leq RX + (1-R)y$

Λύση Ισοδύναμα, παίρνοντας λογάριθμο, θέλουμε να δείξουμε
$R\log_e x + (1-R)\log_e y \leq \log_e(Rx + (1-R)y)$.

Εφαρμόζουμε Jensen στην μορφή $Rf(x) + (1-R)f(y) \leq f(Rx + (1-R)y)$ όπου $f(x) = \log_e x$, $x > 0$. Η f είναι κοίλη καθώς $f'(x) = (\log_e x)' = \frac{1}{x} > 0$ από όπου έπεται η αποδεικτέα.

9.0.4 Ανισότητα Holder

Ακολουθεί η ανισότητα Holder της οποίας, υπόψιν, η περίπτωση $p = q = 2$ ξαναδίνει την Cauchy-Schwarz.

Θεώρημα 9.4 *Αν* a_k, $b_k \geq 0$ *και* p, $q > 0$ *τέτοια ώστε* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *τότε*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{r} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Θα χρειαστούμε το εξής Λήμμα
Λήμμα Αν a, $b > 0$ και p, $q > 0$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
τότε $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$
Πράγματι στην $x^R y^{1-R} \leq Rx + (1-R)y$ παίρνουμε
$R = \frac{1}{p}$, $1 - R = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$, $x = a^p$ και $y = b^q$. Τότε
$x^R y^{1-R} = x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} = ab$, όπως θέλαμε.
Επιστρέφουμε στην απόδειξη της Holder.
Θέτουμε

$$A = \frac{a_1}{(\sum_{k=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}},\ B = \frac{b_1}{(\sum_{k=1}^{n} b_k^q)^{\frac{1}{q}}}$$

Ξέρουμε ότι ισχύει
$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$

Άρα

$$\frac{a_1b_1}{(\sum a_1^p)^{\frac{1}{p}}\,(\sum b_1^q)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{a_1^p}{\sum a_1^p}\cdot\frac{1}{p} + \frac{b_1^2}{\sum b_1^q}\cdot\frac{1}{q}$$

Όμοια

$$\frac{a_2b_2}{(\sum a_1^p)^{\frac{1}{p}}\,(\sum b_1^q)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{a_2^p}{\sum a_1^p}\cdot\frac{1}{p} + \frac{b_2^q}{\sum b_1^q}\cdot\frac{1}{q}$$

$\vdots$

$$\frac{a_nb_n}{(\sum a_1^p)^{\frac{1}{p}}\,(\sum b_1^q)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{a_n^p}{\sum a_1^p}\cdot\frac{1}{p} + \frac{b_n^q}{\sum b_1^q}\cdot\frac{1}{q}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έπεται

$$\frac{\sum a_ib_i}{(\sum a_1^p)^{\frac{1}{p}}\,(\sum b_1^q)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{\sum a_i^p}\cdot\frac{1}{p} + \frac{b_1^q+\cdots+b_n^q}{\sum b_i^q}\cdot\frac{1}{q} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$$

Παράδειγμα 9.10 Αν $a,\, b, c,\, x,\, y,\, z \ge 0$ τότε
$(a^2x^3+b^2y^3+c^2z^3)^5 \le (a^5+b^5+c^5)^2(x^5+y^5+z^5)^3$

Λύση Παίρνουμε
$a_1 = a^2 \quad b_1 = x^3 \quad p = \frac{5}{2}$
$a_2 = b^2 \quad b_2 = y^3 \quad q = \frac{5}{3}$
$a_3 = c^2 \quad b_3 = z^3$
στην Holder. Δίνει
$a^3x^3+b^2y^3+c^2z^3 \le \left(a^{2\cdot\frac{5}{2}}+b^{2\cdot\frac{5}{2}}+c^{2\cdot\frac{5}{2}}\right)^{\frac{2}{5}}\left(x^{3\cdot\frac{5}{3}}+y^{3\cdot\frac{5}{3}}+z^{3\cdot\frac{5}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}$,
που είναι το αποδεικτέο.

Παράδειγμα 9.11 $(a+b)^7 \le 64(a^7+b^7)$

Λύση Στην Holder με $p=7$, οπότε $\frac{1}{q} = 1-\frac{1}{p} = 1-\frac{1}{7} = \frac{6}{7}$, δηλαδή $q = \frac{7}{6}$, έχουμε
$a+b = a\cdot 1+b\cdot 1 \le (a^p+b^p)^{\frac{1}{p}}\cdot(1^q+1^q)^{\frac{1}{q}} = (a^7+b^7)^{\frac{1}{7}}\cdot(2)^{\frac{6}{7}}$
άρα $(a+b)^7 \le 2^6\cdot(a^7+b^7)$

9.0.5 Ανισότητα Minkowski

Θεώρημα 9.5 *Αν $a_k,\, b_k \ge 0$ και $p>1$ τότε*

$$\left(\sum(a_k+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Παραδείγματος χάριν η περίπτωση $p=2$ γράφεται
$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2} \le \sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$

9.0.6 Ανισότητα Chebychev (ή Tsebychev)

Αν $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$ και $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$ τότε

$\frac{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}$

Παράδειγμα 9.12 $p, q \in \mathbb{N}$, $a, b \geq 1$ τότε

$\frac{a^{p+q} + b^{p+q}}{2} \geq \frac{a^p + b^p}{2} \cdot \frac{a^q + b^q}{2}$

Απόδειξη Χωρίς βλάβη $a \geq b$, άρα $a^p \geq b^p$ και $a^q \geq b^q$.

Από Chebychev έχουμε τότε $\frac{a^p a^q + b^p q^q}{2} \geq \frac{a^p + b^p}{2} \cdot \frac{a^q + b^q}{2}$

$\square$