

## MEM201 ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

### Παρατηρήσεις

1. Διαβάστε προσεκτικά τα θέματα πριν αρχίσετε να απαντάτε. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι σαφείς, σύντομες και αιτιολογημένες.
2. Γράψτε σε διαφορετική σελίδα την απάντηση κάθε θέματος. Συνιστάται να γράφετε τις απαντήσεις μόνο στη δεξιά σελίδα, και να χρησιμοποιείτε την αριστερή για πρόχειρους υπολογισμούς (ή το αντίθετο αν είστε αριστερόχειρες).
3. Πρέπει να παραδώσετε όλες τις κόλλες που χρησιμοποιήσατε.
4. Η εξέταση διαρκεί 2 ώρες. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ ΝΑ ΕΧΕΤΕ ΚΙΝΗΤΑ ΤΗΛΕΦΩΝΑ ΜΕΣΑ ΣΤΗΝ ΑΙΘΟΥΣΑ. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ Η ΕΞΟΔΟΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΙΘΟΥΣΑ σε όλη τη διάρκεια της εξέτασης. Την πρώτη μισή ώρα της εξέτασης απαγορεύεται η έξοδος ή η αποχώρηση από την εξέταση.
5. Οι βαθμοί δίδονται σε παρένθεση. Ο μέγιστος βαθμός είναι 100.

### ΘΕΜΑ 1.

Εάν  $a, b, c > 0$  και  $c < a + b$ , απλοποιήστε την παράσταση

$$\left( \sqrt{a + b + c + 2\sqrt{(a+b)c}} - \sqrt{a + b + c - 2\sqrt{(a+b)c}} \right)^2.$$

### ΘΕΜΑ 2.

Αποδείξτε την ταυτότητα Euler

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

και χρησιμοποιήστε την για να παραγοντοποιήσετε την παράσταση

$$a^3 - 8b^3 - 18ab - 27.$$

### ΘΕΜΑ 3.

Δείξτε ότι εάν  $m$  είναι φυσικός αριθμός, τότε  $\sqrt{m} + \sqrt{m+2}$  είναι άρρητος αριθμός.

### ΘΕΜΑ 4.

Λύστε την ανισότητα

$$|x - 2| + |x + 2| - 2x > 0.$$

**ΘΕΜΑ 5.**

Γράψτε τον αριθμό  $\sqrt{11 + \sqrt{72}}$  στη μορφή  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ , όπου  $a, b \in \mathbb{Q}$ .

**ΘΕΜΑ 6.**

Για ποιές τιμές της παραμέτρου  $\lambda$  έχει διπλή ρίζα η εξίσωση

$$(3\lambda - 2)x^2 - (\lambda + 2)x + \lambda = 1.$$

**ΘΕΜΑ 7.**

Εάν  $\rho_1$  και  $\rho_2$  είναι οι ρίζες του τριωνύμου  $x^2 - 3x + 5$ , βρείτε τις τιμές των

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \quad \text{και} \quad \rho_1^3 + \rho_2^3.$$

**ΘΕΜΑ 8.**

Να επιλυθεί το σύστημα εξισώσεων

$$xy = 30$$

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{61}{900}.$$

**ΘΕΜΑ 9.**

Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k}}.$$

**ΘΕΜΑ 10.**

Να υπολογίσετε όλες τις τέταρτες ρίζες του αριθμού  $2^3(\sqrt{3}i - 1)$ .

**ΘΕΜΑ 11.**

Δείξτε ότι

$$\cos(2 \arctan x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$

**ΘΕΜΑ 12.**

Δείξτε ότι για τις υπερβολικές συναρτήσεις  $\cosh$  και  $\sinh$ ,

$$\sinh x + \sinh y = 2 \sinh \left( \frac{x+y}{2} \right) \cosh \left( \frac{x-y}{2} \right).$$