ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Περίοδος Ιουνίου 2015
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ201 ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Παρατηρήσεις

1. Διαβάστε προσεκτικά τα θέματα πριν αρχίσετε να απαντάτε. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι σαφείς, σύντομες και αιτιολογημένες.
2. Γράψτε σε διαφορετική σελίδα την απάντηση κάθε θέματος. Συνιστάται να γράφετε τις απαντήσεις μόνο στη δεξιά σελίδα, και να χρησιμοποιείτε την αριστερή για πρόχειρους υπολογισμούς (ή το αντίθετο αν είστε αριστερόχειρες).
3. Πρέπει να παραδόσετε ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ και όλες τις κόλλες που χρησιμοποιήσατε.
4. Η εξέταση διαρκεί 150 λεπτά. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ ΝΑ ΕΧΕΤΕ ΚΙΝΗΤΑ ΤΗΛΕΦΩΝΑ ΜΕΣΑ ΣΤΗΝ ΑΙΘΟΥΣΑ. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ Η ΕΞΟΔΟΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΙΘΟΥΣΑ σε όλη τη διάρκεια της εξέτασης. Την πρώτη μισή ώρα της εξέτασης απαγορεύεται η έξοδος ή η αποχώρηση από την εξέταση.
5. Οι βαθμοί δίδονται σε παρένθεση. Ο μέγιστος βαθμός είναι 100.

ΘΕΜΑ 1. (8)
Να εκφραστεί η παράσταση

$$\frac{y}{x^3} + \frac{x}{y^3}$$

συναρτήσει των $x + y$ και xy.

$$\begin{aligned} \frac{y}{x^3} + \frac{x}{y^3} &= \frac{y^4 + x^4}{x^3 y^3} \\ &= \frac{(x^2 + y^2)^2 - 2x^2 y^2}{x^3 y^3} \\ &= \frac{((x+y)^2 - 2xy)^2 - 2(xy)^2}{(xy)^3} \end{aligned}$$

Προσοχή: Το άθροισμα άρτιων δυνάμεων, όπως το $y^4 + x^4$, δεν παραγοντοποιείται όπως το άθροισμα περιττών δυνάμεων!

ΘΕΜΑ 2. (10)
Να παραγοντοποιηθεί σε παράγοντες βαθμού 4 ή μικρότερο η παράσταση

$$a^{10} - 1024\,.$$

Ξεκινάμε με τη διαφορά τετραγώνων, και μετά με τη διαφορά και το άθροισμα περιττών δυνάμεων.

$$\begin{aligned} a^{10} - 2^{10} &= (a^5 - 2^5)(a^5 + a^5) \\ &= (a-2)(a^4 + 2a^3 + 4a^2 + 8a + 16)(a+2)(a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 8a + 16) \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3. (12)
Δείξτε οτι εάν m είναι φυσικός αριθμός, τότε $\sqrt{m + \sqrt{m}}$ είναι άρρητος αριθμός.

Υποθέτουμε οτι $\sqrt{m + \sqrt{m}}$ είναι ρητός αριθμός.

Το τετράγωνο ενός ρητού αριθμού είναι ρητός. Άρα, εάν $\sqrt{m + \sqrt{m}}$ είναι ρητός, τότε $m + \sqrt{m}$ είναι επίσης ρητός. Αλλά εάν $m + \sqrt{m}$ είναι ρητός, τότε $\sqrt{m}$ είναι ρητός.

Γνωρίζουμε οτι εάν ένας φυσικός αριθμός δεν είναι τέλειο τετράγωνο, τότε η τετραγωνική του ρίζα είναι άρρητος αριθμός. Συνεπώς m είναι τέλειο τετράγωνο, έστω $m = k^2$. Τότε $m + \sqrt{m} = k^2 + k$, δηλαδή $m + \sqrt{m}$ είναι φυσικός αριθμός.

Άρα εάν δείξουμε οτι ένας φυσικός αριθμός της μορφής $k^2 + k$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο, συμπεραίνουμε οτι η υπόθεση πως $\sqrt{m + \sqrt{m}}$ είναι ρητός οδηγεί σε αντίφαση.

Παρατηρούμε οτι $r^2 < r^2 + r < r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2$. Δηλαδή ένας αριθμός της μορφής $r^2 + r$ βρίσκεται μεταξύ δύο διαδοχικών τετραγώνων, και συνεπώς δεν είναι ο ίδιος τέλειο τετράγωνο.

Προσοχή: ένας αριθμός της μορφής $m + \sqrt{m}$ δεν είναι υποχρεωτικά άρρητος. Για παράδειγμα, $4 + \sqrt{4} = 6$. Δείξαμε όμως οτι εάν είναι ρητός, τότε είναι φυσικός, αλλά δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

ΘΕΜΑ 4. (10)
Να αποδειχθεί οτι εάν a, b είναι διαφορετικοί θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a + b = 1$, τότε

$$\frac{a^4 - b^4}{a - b} > \frac{1}{2}\,.$$

Προσπαθούμε να απλοποιήσουμε την παράσταση, χρησιμοποιώντας το δεδομένο οτι $a + b = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{a^4 - b^4}{a - b} &= a^3 + a^2 b + a b^2 + b^3 \\ &= (a^2 + b^2)(a + b) \\ &= a^2 + b^2 \\ &= (a+b)^2 - 2ab \\ &= 1 - 2ab \end{aligned}$$

Άρα αρκεί να δείξουμε οτι όταν a, b είναι διαφορετικοί θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a+b = 1$, τότε $1 - 2ab > \frac{1}{2}$, δηλαδή οτι $4ab < 1$. Πράγματι, αφού $a + b = 1$ και $a - b \neq 0$,

$$4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 1 - (a-b)^2 < 1\,.$$

ΘΕΜΑ 5. (10)
Γράψτε τον αριθμό $\sqrt{18 + \sqrt{180}}$ στη μορφή $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, όπου a, $b \in \mathbb{Q}$.

Παρατηρούμε οτι $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab}$. Άρα θέλουμε να βρούμε δύο θετικούς ρητούς αριθμούς a, b τέτοιους ώστε $a+b=18$ και $2\sqrt{ab}=\sqrt{180}$, δηλαδή $ab=45$. Ένα τέτοιο ζεύγος είναι $a=3$, $b=15$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \sqrt{18+\sqrt{180}} &= \sqrt{18+2\sqrt{45}} \\ &= \sqrt{3+2\sqrt{3}\sqrt{15}+15} \\ &= =\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{15})^2} \\ &= \sqrt{3}+\sqrt{15}\,. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 6. (12)
Για ποιές τιμές της παραμέτρου λ έχει δύο διαφορετικές θετικές ρίζες το τριώνυμο

$$x^2-2\lambda x+\lambda+1\,.$$

Για να έχει δύο διαφορετικές ρίζες, πρέπει η διακρίνουσα να είναι θετική, $4\lambda^2-4\lambda-4>0$. Για να είναι και οι δυο ρίζες θετικές, πρέπει να έχουν θετικό άθροισμα και θετικό γινόμενο: $\rho_1+\rho_2=2\lambda>0$ και $\rho_1\rho_2=\lambda+1>0$.

Συνεπώς θέλουμε τις θετικές τιμές του λ για τις οποίες $\lambda^2-\lambda-1>0$.

Οι ρίζες του $\lambda^2-\lambda-1$ είναι $\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}$, και η διακρίνουσα $\lambda^2-\lambda-1$ είναι θετική όταν $\lambda<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ή $\lambda>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Αλλά $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$. Άρα οι ζητούμενες τιμές της παραμέτρου είναι $\lambda>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

ΘΕΜΑ 7. (10)
Εάν ρ_1, ρ_2 και ρ_3 είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $x^3+(\lambda-1)x^2-(\lambda+2)x-2\lambda$, βρείτε την τιμή του $\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2$ ως συνάρτηση του λ.

Γνωρίζουμε οτι $\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2=(\rho_1+\rho_2+\rho_3)^2-2(\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1)$, και από τους τύπους Vieta

$$\rho_1+\rho_2+\rho_3=-(\lambda-1) \quad , \qquad \rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1=-(\lambda+2)\,.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2 &= (\lambda-1)^2+2(\lambda+2) \\ &= \lambda^2-2\lambda+1+2\lambda+4 \\ &= \lambda^2+5\,. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 8. (8)
Να επιλυθεί το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} x+y^2 &= 4 \\ xy^2 &= -45 \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε οτι ρ_1 και ρ_2 είναι ρίζες του τριωνύμου $\alpha^2-(\rho_1+\rho_2)\alpha+(\rho_1\rho_2)$.

Θεωρούμε το τριώνυμο $\alpha^2-4\alpha-45$, του οποίου οι ρίζες είναι $\alpha=\frac{4\pm\sqrt{16+180}}{2}=2\pm7$. Η ρίζα $\alpha=-5$ απορρίπτεται για τιμή του y^2. Συνεπώς έχουμε $x=-5$ και $y^2=9$.

Οι λύσεις του συστήματος είναι $(x,\, y) = (-5,\, 3)$ και $(-5,\, -3$.

ΘΕΜΑ 9. (10)
Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}}\,.$$

Παρατηρούμε οτι

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}} &= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}} \\ &= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{(k+1)-(k-1)} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{2}\,. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{4}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \cdots \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{\sqrt{n-1}}{2}-\frac{\sqrt{n-3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{n}}{2}-\frac{\sqrt{n-2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{n+1}}{2}-\frac{\sqrt{n-1}}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}+\frac{\sqrt{n+1}}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-1)\,. \end{aligned}$$

Προσοχή: Αφού παρατηρούμε οτι το πρώτο μέρος του πρώτου όρου απαλείφεται με το δεύτερο μέρος του **τρίτου** όρου του αθροίσματος, πρέπει να γράψουμε τουλάχιστον τρεις όρους από την αρχή και τρεις από το τέλος του αθροίσματος, για να δούμε ποιοί όροι απομένουν από την τηλεσκοπική σειρά.

ΘΕΜΑ 10. (10)
Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε σε ένα πρόχειρο σχήμα όλες τις τέταρτες ρίζες του αριθμού $z = -2^3(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})$.

Γράφουμε τον αριθμό $z = -2^3(1-\mathrm{i}\sqrt{3})$ σε τριγωνομετρική μορφή $r(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)$, όπου $r \geq 0$. (Προσέξτε επίσης οτι το πρόσημο πριν το sin πρέπει να είναι $+$).

$$z = -2^3(1-\mathrm{i}\sqrt{3}) = 2^4(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2})\,,$$

Άρα $\cos\vartheta = \frac{1}{2}$ και $\sin\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, συνεπώς $\vartheta = \frac{2\pi}{3}$ και έχουμε

$$z = 2^4(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\,.$$

Μία τέταρτη δύναμη του z είναι η

$$w = 2(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} + \mathrm{i}\,.$$

Για να βρούμε όλες τις τέταρτες ρίζες του z πολλαπλασιάζουμε με τις τέταρτες ρίζες της μονάδας, 1, i, -1, $-\mathrm{i}$. Οι τέταρτες ρίζες του z είναι

$$\sqrt{3} + \mathrm{i}, \quad -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \quad -\sqrt{3} - \mathrm{i}, \quad 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\,.$$

Σχεδιάστε τις 4 ρίζες στο επίπεδο. Βρίσκονται σε έναν κύκλο με ακτίνα 2, και σχηματίζουν γωνίες 30, 120, 210 και 300^{deg} με τον θετικό x-άξονα.

ΘΕΜΑ 11. (8)
Δείξτε οτι

$$\tan 3\vartheta = \frac{3\tan\vartheta - \tan^3\vartheta}{1 - 3\tan^2\vartheta}\,.$$

Γνωρίζουμε, ή αν δεν θυμόμαστε υπολογίζουμε την εφαπτομένη αθροίσματος.

$$\begin{aligned}
\tan(\vartheta + \varphi) &= \frac{\sin(\vartheta + \varphi)}{\cos(\vartheta + \varphi)} \\
&= \frac{(\sin\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta\sin\varphi}{\cos\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi} \\
&= \frac{\tan\vartheta + \tan\varphi}{1 - \tan\vartheta\tan\varphi}\,.
\end{aligned}$$

Άρα $\tan 2\vartheta = \frac{2\tan\vartheta}{1-\tan^2\vartheta}$ και

$$\begin{aligned}
\tan 3\vartheta &= \frac{\tan\vartheta + \tan 2\vartheta}{1 - \tan\vartheta\tan 2\vartheta} \\
&= \frac{\tan\vartheta + \frac{2\tan\vartheta}{1-\tan^2\vartheta}}{1 - \tan\vartheta\frac{2\tan\vartheta}{1-\tan^2\vartheta}} \\
&= \frac{\tan\vartheta - \tan^3\vartheta + 2\tan\vartheta}{1 - \tan^2\vartheta - 2\tan^2\vartheta} \\
&= \frac{3\tan\vartheta - \tan^3\vartheta}{1 - 3\tan^2\vartheta}\,.
\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 12. (10)
Υπολογίστε το συνημίτονο του τόξου $2\arctan x^2$.

Έστω $\vartheta = 2\arctan x^2$. Τότε $\tan\frac{\vartheta}{2} = x^2$. Γνωρίζουμε οτι $\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\tan^2\varphi}$ και $\sin^2\varphi = \frac{\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi}$.

Άρα

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = \cos^2\frac{\vartheta}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{1 - \tan^2\frac{\vartheta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\vartheta}{2}}\,,$$

και αντικαθιστώντας έχουμε $\cos\vartheta = \frac{1-x^4}{1+x^4}$.

ΘΕΜΑ 13. (10)
Δείξτε οτι για τη συνάρτηση υπερβολικό συνημίτονο cosh, ισχύει

$$\cosh x + \cosh y = 2\cosh\left(\frac{x+y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Γνωρίζουμε τους τύπους του αθροίσματος και της διαφοράς για το υπερβολικό συνημίτονο. $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$ και $\cosh(a-b) = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b$.

Προσέξτε οτι οι τύποι για τις υπερβολικές συναρτήσεις διαφέρουν σε κάποια πρόσημα από τους αντίστοιχους τύπους των τριγωνομετρικών συναρτήσεων!

Θέτουμε $a = \frac{x+y}{2}$ και $b = \frac{x-y}{2}$. Αντικαθιστούμε και έχουμε

$$\begin{aligned}
\cosh x + \cosh y &= \cosh(a+b) + \cosh(a-b) \\
&= \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b + \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \\
&= 2\cosh a \cosh b \\
&= 2\cosh\left(\frac{x+y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x-y}{2}\right).
\end{aligned}$$

Εναλλακτικά,μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του υπερβολικού συνημιτόνου, $\cosh t = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$, και να αντικαταστήσουμε στη δεξιά πλευρά της ταυτότητας.