Κεφάλαιο 7

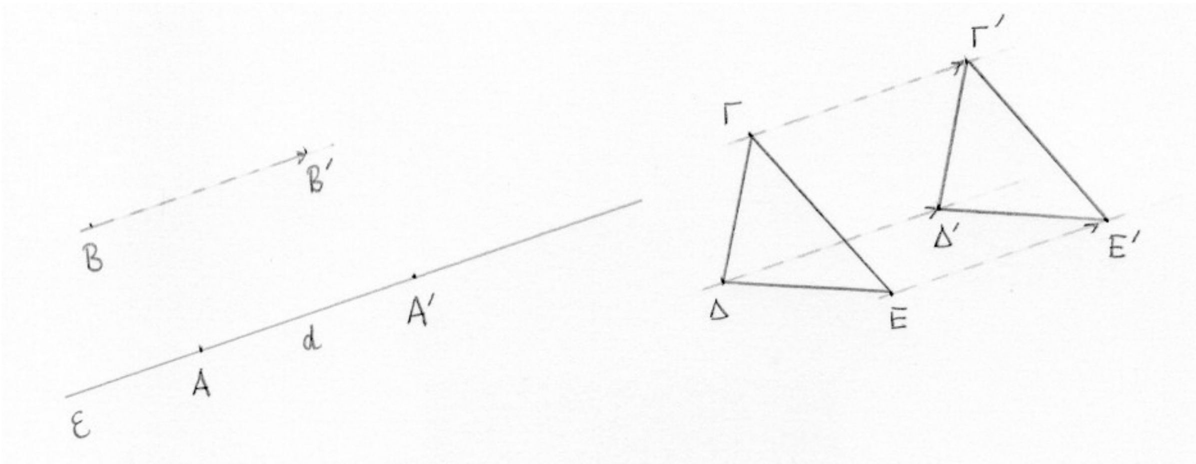
Ισομετρίες, Συμμετρίες και Πλακοστρώσεις

Όπως είδαμε στην απόδειξη του πρώτου κριτηρίου ισότητας τριγώνων, ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την έννοια της 'εφαρμογής' ενός τριγώνου σε ένα άλλο, χωρίς να διευκρινίζει ακριβώς τι εννοεί. Στη σύγχρονη Γεωμετρία αυτή η έννοια της εφαρμογής ορίζεται μέσω ισομετριών.

Ορισμός. Μία **ισομετρία** είναι μία αντιστοίχηση όλων των σημείων του επιπέδου Α, Β, Γ, ..., Χ, ... σε άλλα σημεία του επιπέδου Α′, Β′, Γ′, ..., Χ′, ... με τρόπο ώστε να διατηρούνται οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων. Δηλαδή, η απόσταση Α′Β′ να είναι ίση με την απόσταση ΑΒ. Τις ισομετρίες θα τις συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα του λατινικού αλφαβήτου, T, R, F, G, U, V, ... Η ισομετρία U απεικονίζει το σημείο Χ του επιπέδου στο σημείο $U(\mathrm{X}) = \mathrm{X}'$.

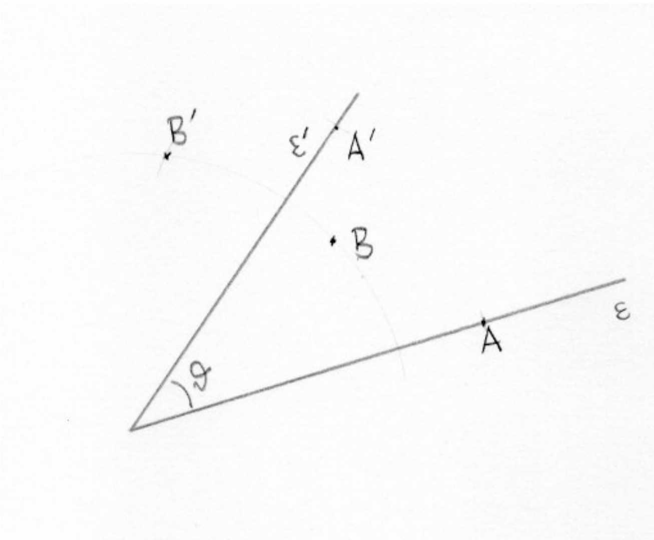
Παράδειγμα 7.1 Μία **παράλληλη μετατόπιση** T στην κατεύθυνση της ευθείας ε κατά απόσταση d, μετακινεί κάθε σημείο του επιπέδου κατά μήκος μίας ευθείας παράλληλης προς την ε, έτσι ώστε το σημείο Α να μετακινείται στο $T(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$ και η απόσταση ΑΑ′ να είναι ίση με d. Για τον ακριβή χαρακτηρισμό μίας παράλληλης μετατόπισης θεωρούμε την ευθεία ε προσανατολισμένη: επιλέγουμε μία από τις δύο κατευθύνσεις ως θετική, και η μετατόπιση σε αυτή την κατεύθυνση αντιστοιχεί σε θετικές τιμές του d, ενώ η μετατόπιση στην αντίθετη κατεύθυνση σε αρνητικές τιμές.

Παράδειγμα 7.2 Μία **περιστροφή** R γύρω από το σημείο Ο κατά γωνία ϑ κρατάει σταθερό το σημείο Ο, $R(\mathrm{O}) = \mathrm{O}$, και μετακινεί κάθε ευθεία ζ που περνάει από το Ο σε μία ευθεία ζ' που σχηματίζει γωνία ϑ με τη ζ, διατηρώντας τις αποστάσεις των σημείων της ευθείας από το Ο. Και σε αυτή την περίπτωση, χρειάζεται να επιλέξουμε έναν προσανατολισμό των περιστροφών του επιπέδου, αντίθετα προς τους δείκτες του



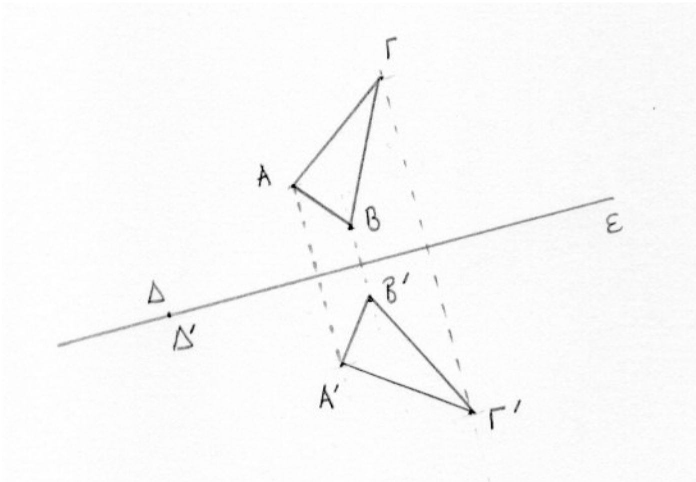
Σχήμα 7.1: Παράλληλη μετατόπιση.

ρολογιού (θετικές τιμές του θ) ή σύμφωνα με αυτούς (αρνητικές τιμές του ϑ). Καθώς μία ολόκληρη περιστροφή φέρνει τα σημεία του επιπέδου στην αρχική τους θέση, συνήθως περιορίζουμε τη γωνία περιστροφής σε τιμές $-180^o < \vartheta \leq 180^o$.



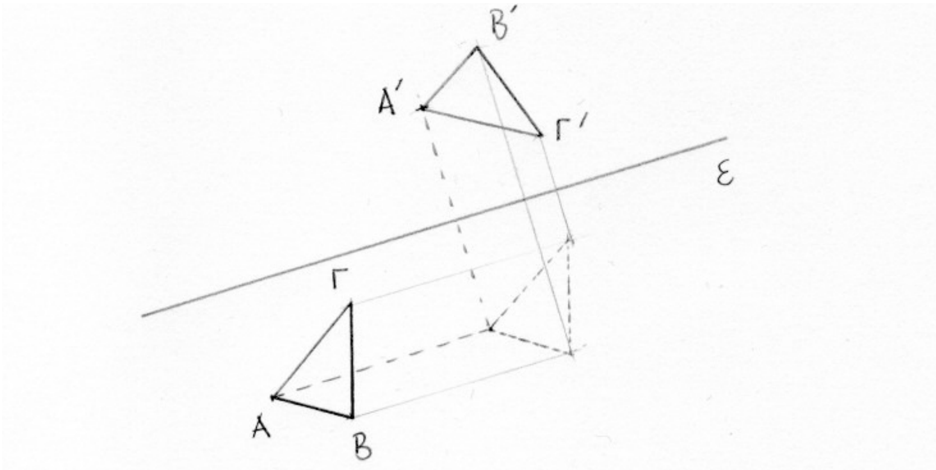
Σχήμα 7.2: Περιστροφή.

Παράδειγμα 7.3 Μία **ανάκλαση** F ως προς μία ευθεία ε κρατάει σταθερά όλα τα σημεία στην ευθεία ε, και μετακινεί κάθε σημείο Β του ενός ημιεπιπέδου της ε σε ένα σημείο Β′ του άλλου ημιεπιπέδου, έτσι ώστε το η ε να είναι η μεσοκάθετος του διαστήματος ΒΒ′.



Σχήμα 7.3: Ανάκλαση.

Παράδειγμα 7.4 Τέλος, μία **ολισθανάκλαση** είναι μία παράλληλη μετατόπιση στη διεύθυνση της ευθείας ε ακολουθούμενη από μία ανάκλαση στην ευθεία ε.



Σχήμα 7.4: Ολισθανάκλαση.

Μπορούμε να αποδείξουμε οτι όλες οι ισομετρίες του επιπέδου ανήκουν σε μία από αυτές τις τέσσερεις κατηγορίες. Εκτός από αυτές τις κατηγορίες, δεχόμαστε ως ισομετρία και την ταυτοτική απεικόνιση, που δεν μετακινεί κανένα σημείο, αλλά απλά απεικονίζει κάθε σημείο στον εαυτό του.

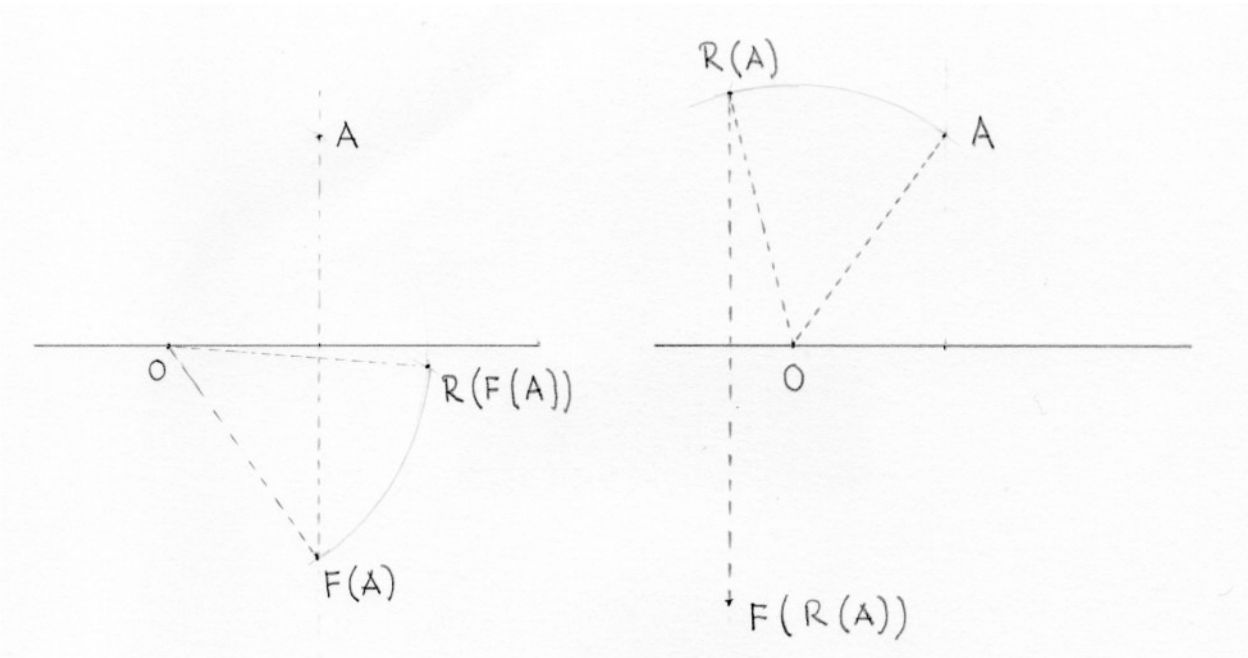
Κάθε ισομετρία U του επιπέδου είναι μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοίχιση: σε κάθε σημείο Α του επιπέδου αντιστοιχεί ένα μόνο μόνον ένα σημείο $\mathrm{A}' = U(\mathrm{A})$.

Μπορούμε να συνθέτουμε ισομετρίες: εφαρμόζουμε πρώτα την ισομετρία U και μετά την ισομετρία V. Αυτό το συμβολίζουμε VU:

$$VU(\mathrm{A}) = V(U(\mathrm{A}))\,.$$

Μία σημαντική ιδιότητα των ισομετριών είναι οτι η διάταξη με την οποία εφαρμόζουμε δύο ισομετρίες έχει σημασία. Δηλαδή το να εφαρμόσω πρώτα την ισομετρία U και μετά την ισομετρία V **δεν είναι το ίδιο** με το να εφαρμόσω πρώτα τη V και μετά την U,

$$VU \neq UV\,.$$



Σχήμα 7.5: Η σύνθεση ισομετριών δεν είναι μεταθετική.

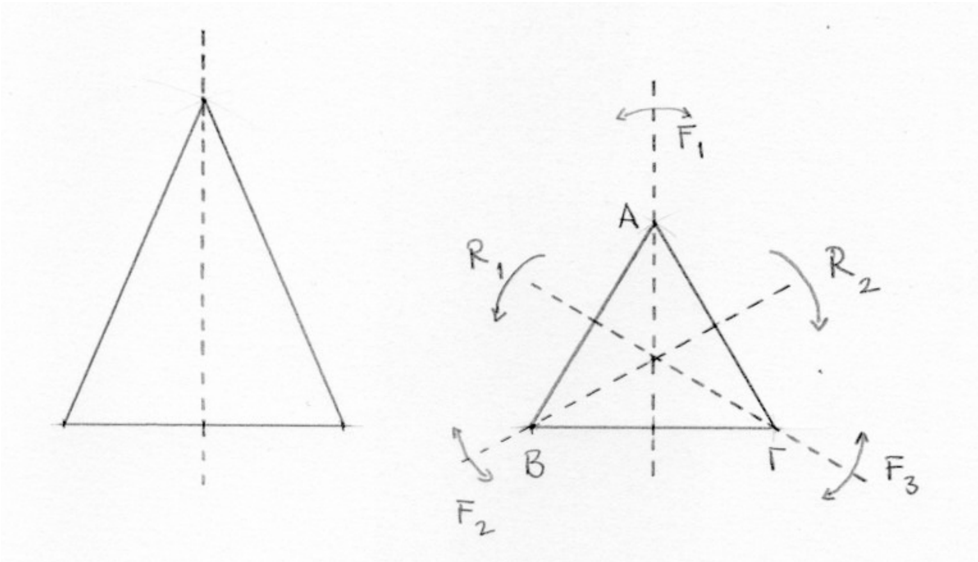
Ορισμός. Λέμε οτι ένα σχήμα είναι **συμμετρικό** εάν υπάρχει κάποια ισομετρία που να το απεικονίζει στον εαυτό του.

Παράδειγμα 7.5 Ένα ισοσκελές τρίγωνο είναι συμμετρικό ως προς την ανάκλαση στη διάμεσο από την κορυφή,

$$F(\mathrm{A}) = \mathrm{A}, \qquad F(\mathrm{B}) = \Gamma, \qquad F(\Gamma) = \mathrm{B}, \qquad F(\mathrm{X}) = \mathrm{X}', \qquad F(\Psi) = \Psi'\,.$$

Ένα ισόπλευρο τρίγωνο είναι συμμετρικό ως προς τις ανακλάσεις σε όλες τις διαμέσους του, αλλά και ως προς περιστροφή κατά 120^o ή -120^o γύρω από το σημείο τομής των διαμέσων,

$$R_1(\mathrm{A}) = \mathrm{B}, \qquad R_1(\mathrm{B}) = \Gamma, \qquad \mathbb{R}_1(\Gamma) = \mathrm{A}, \qquad R_1(\mathrm{X}) = \mathrm{X}'\,.$$



Σχήμα 7.6: Συμμετρίες ισοσκελούς και ισόπλευρου τριγώνου.

Άσκηση 7.1 Εάν οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες και απέχουν απόσταση d, ποιά είναι η ισομετρία που προκύπτει όταν εφαρμόσουμε πρώτα την ανάκλαση F_1 στην ευθεία ε_1 και κατόπιν την ανάκλαση F_2 στην ευθεία ε_2;

Άσκηση 7.2 Εάν οι ευθείες ζ_1 και ζ_2 τέμνονται στο σημείο Ο και σχηματίζουν γωνία ϑ, ποιά είναι η ισομετρία που προκύπτει όταν εφαρμόσουμε πρώτα την ανάκλαση F_1 στην ευθεία ζ_1 και κατόπιν την ανάκλαση F_2 στην ευθεία ζ_2;

Άσκηση 7.3 Βρείτε όλες τις ισομετρίες του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

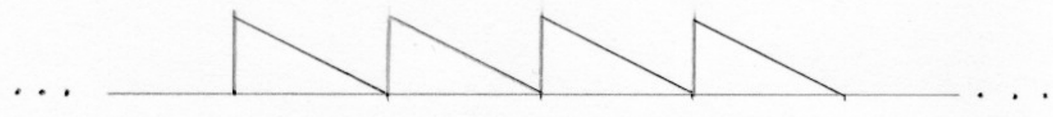
Άσκηση 7.4 Βρείτε όλες τις ισομετρίες του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

Άσκηση 7.5 Βρείτε όλες τις ισομετρίες του ρόμβου ΑΒΓΔ.

Άσκηση 7.6 Βρείτε όλες τις ισομετρίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

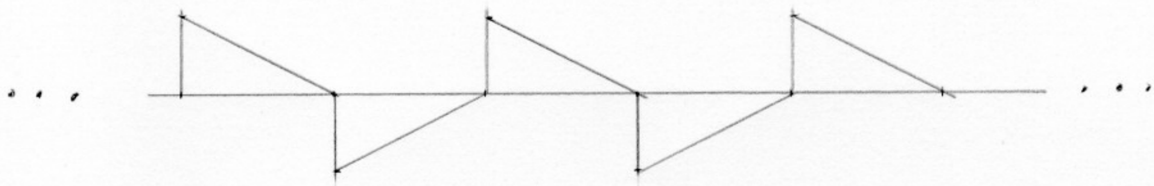
Σχήματα που είναι συμμετρικά ως προς μία παράλληλη μετατόπιση ή μία ολισθανάκλαση πρέπει να έχουν άπειρο μήκος: εάν επαναλάβουμε την ισομετρία n φορές, ένα σημείο μετακινείται κατά απόσταση nd, αλλά πρέπει να απεικονίζεται πάλι σε σημείο του σχήματος.

Παράδειγμα 7.6 Στο Σχήμα 7.7, έχουμε μία ταινία συμμετρική ως προς την παράλληλη μετατόπιση T κατά απόσταση d, και τις ισομετρίες T^2, T^3, T^4, $\ldots$ και T^{-1}, T^{-2}, T^{-3}, $\ldots$, δηλαδή τις παράλληλες μετατοπίσεις κατά $\pm d$, $\pm 2d$, $\pm 3d$, $\ldots$.



Σχήμα 7.7: Ταινία συμμετρική ως προς παράλληλη μετατόπιση.

Παράδειγμα 7.7 Στο Σχήμα 7.8, έχουμε μία ταινία συμμετρική ως προς την ολισθανάκλαση G και τις ισομετρίες G^2, G^3, G^4, $\ldots$ και G^{-1}, G^{-2}, G^{-3}, $\ldots$. Παρατηρήστε οτι όταν n είναι άρτιος, G^n είναι παράλληλη μετατόπιση, ενώ όταν n είναι περιττός G^n είναι ολισθανάκλαση.

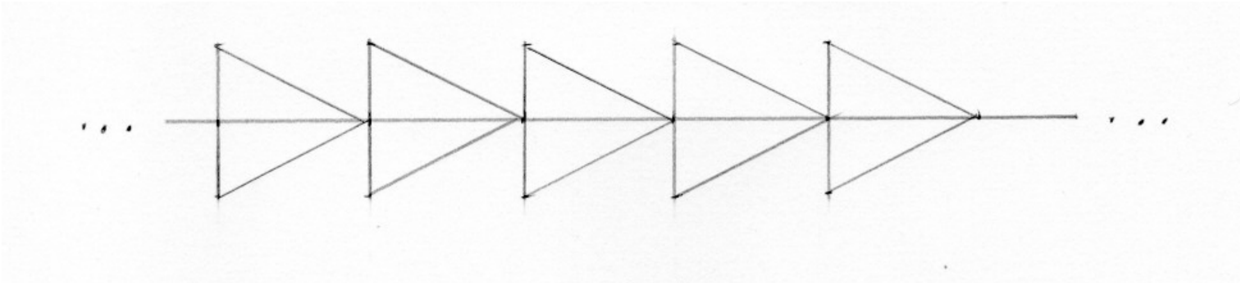


Σχήμα 7.8: Ταινία συμμετρική ως προς ολισθανάκλαση.

Άσκηση 7.7 Βρείτε όλες τις ισομετρίες της ταινίας στο Σχήμα 7.9.

Πλακοστρώσεις του επιπέδου

Μία **πλακόστρωση** του επιπέδου είναι ένα σχήμα που καλύπτει όλο το επίπεδο και έχει πολλές συμμετρίες. Μία **κανονική πλακόστρωση** του επιπέδου αποτελείται από ίσα κανονικά πολύγωνα που καλύπτουν όλο το επίπεδο. Το γεγονός οτι στο



Σχήμα 7.9: Συμμετρική ταινία.

ευκλείδειο επιπεδο όλα τα τρίγωνα έχουν σταθερό άθροισμα γωνιών, περιορίζει πολύ τις κανονικές πλακοστρώσεις: υπάρχουν μόνο τρεις.

Ας υποθέσουμε οτι θέλουμε να καλύψουμε το επίπεδο με κανονικά ν-γωνα. Γνωρίζουμε οτι το άθροισμα των γωνιών ενός ν-γώνου είναι $4\nu - 4$ ορθές. Αφού σε ένα κανονικό πολύγωνο όλες οι γωνίες είναι ίσες, κάθε μία είναι ίση με $\frac{2\nu-4}{\nu}$ ορθές. Για να καλυφθεί όλο το επίπεδο από τα κανονικά ν-γωνα, πρέπει οι γωνίες των ν-γώνων να ταιριάζουν γύρω από μία κορυφή της πλακόστρωσης χωρίς κενά ή επικαλύψεις. Δηλαδή το άθροισμα των γωνιών που ταιριάζουν γύρω από μία κορυφή της πλακόστρωσης πρέπει να είναι ίσο με 4 ορθές. Συμπεραίνουμε οτι εάν ο αριθμός των ν-γώνων που συναντώνται σε μία κορυφή είναι k, τότε ο k και ο ν πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση $k\,\frac{2\nu-4}{\nu} = 4$. Άρα $k = \frac{4\nu}{2\nu-4} = \frac{2\nu}{\nu-2}$, και τόσο ο ν όσο και ο k πρέπει να είναι ακέραιοι. Ας δούμε τι δυνατότητες υπάρχουν.

Για $\nu = 3$, $\frac{2\nu}{\nu-2} = 6$. Άρα μπορούμε να έχουμε μία πλακόστρωση με ισόπλευρα τρίγωνα, έτσι ώστε να συναντιώνται 6 τρίγωνα γύρω από κάθε κορυφή.

Για $\nu = 4$, $\frac{2\nu}{\nu-2} = 4$. Άρα μπορούμε να έχουμε μία πλακόστρωση με τετράγωνα, έτσι ώστε να συναντιώνται 4 τετράγωνα γύρω από κάθε κορυφή.

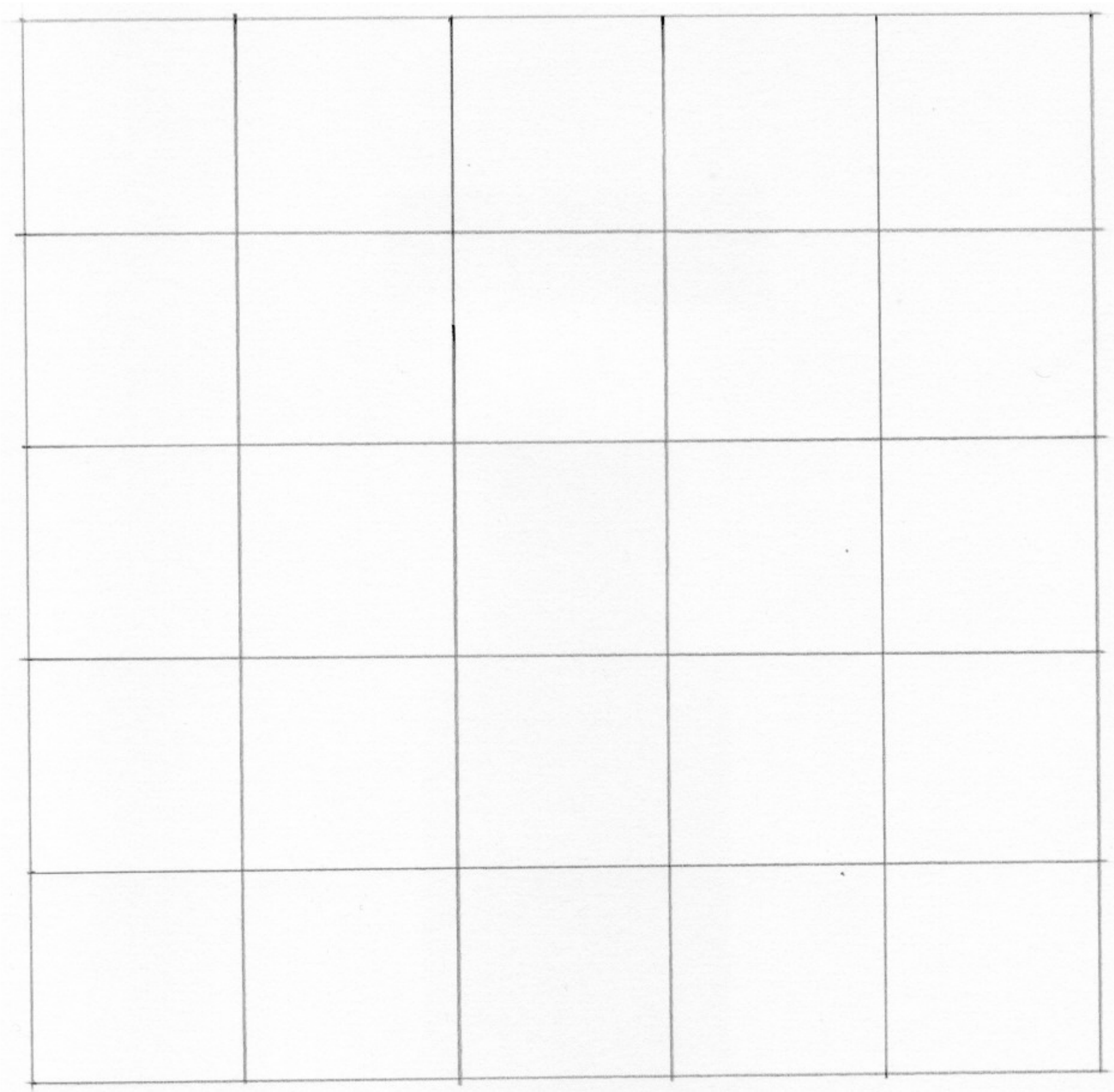
Για $\nu = 5$, $\frac{2\nu}{\nu-2} = \frac{10}{3}$ που δεν είναι ακέραιος. Άρα δεν μπορούμε να έχουμε μία πλακόστρωση με κανονικά πεντάγωνα.

Για $\nu = 6$, $\frac{2\nu}{\nu-2} = 3$. Άρα μπορούμε να έχουμε μία πλακόστρωση με κανονικά εξάγωνα, έτσι ώστε να συναντιώνται 3 εξάγωνα γύρω από κάθε κορυφή.

Για $\nu = 7$, $\frac{2\nu}{\nu-2} = \frac{14}{5}$. Άρα δεν μπορούμε να έχουμε μία πλακόστρωση με κανονικά επτάγωνα. Βλέπουμε οτι για $\nu > 6$, έχουμε $\frac{2\nu}{\nu-2} < 3$, ενώ σε κάθε περίπτωση $\frac{2\nu}{\nu-2} > 2$. Συμπεραίνουμε οτι δεν υπάρχει ακέραιος ίσος με $\frac{2\nu}{\nu-2}$ για $\nu > 6$. Καταλήγουμε οτι υπάρχουν μόνον τρεις κανονικές πλακοστρώσεις του επιπέδου, από τρίγωνα, τετράγωνα και εξάγωνα.

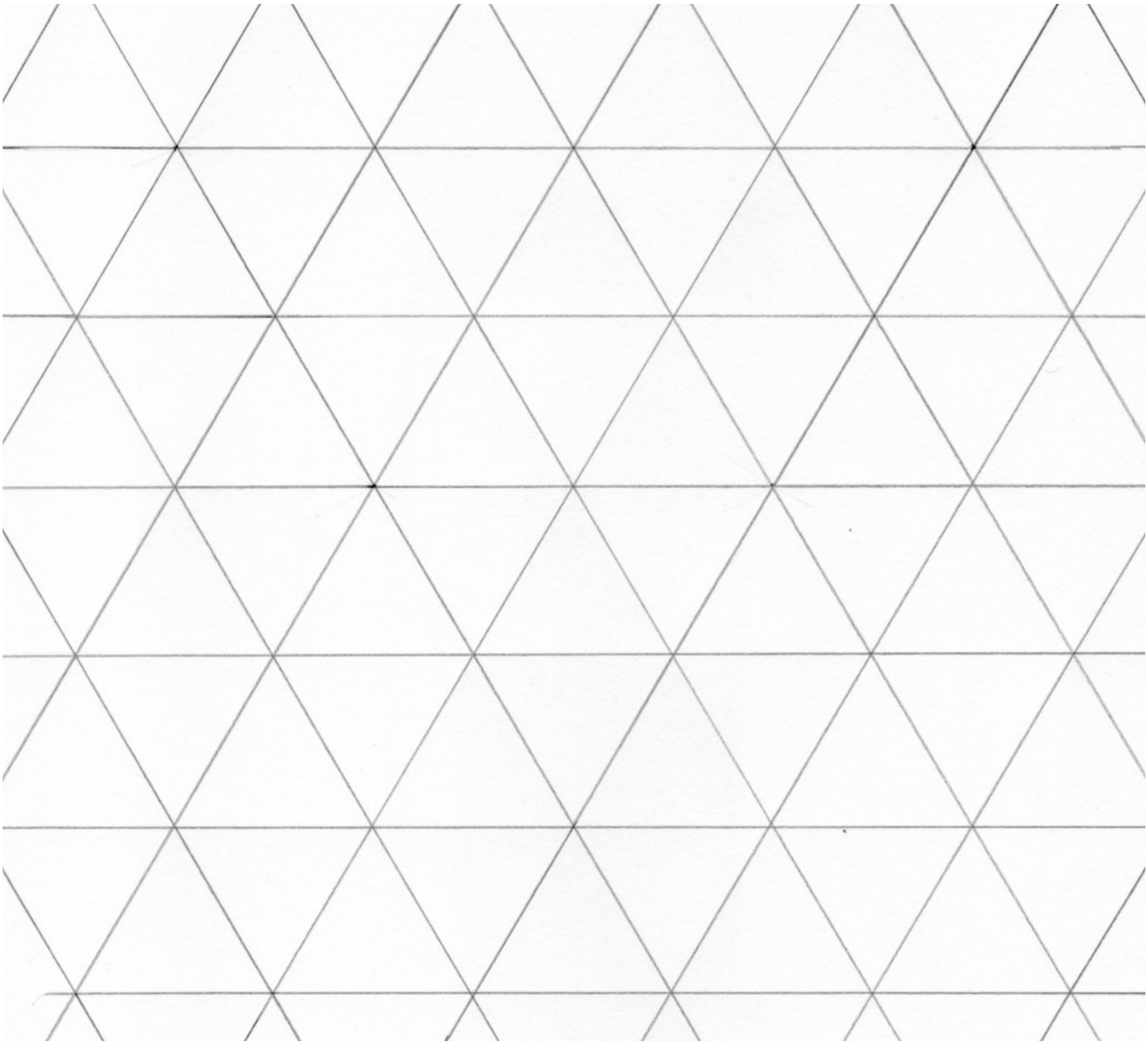
Οι συμμετρίες των κανονικών πλακοστρώσεων είναι πάρα πολλές: αρκετές ώστε να μπορούμε να απεικονίσουμε κάθε πολύγωνο σε κάθε άλλο με μία συμμετρία.

Αυτό είναι πολύ εύκολο για την πλακόστρωση με τετράγωνα: οριζόντιες και κατακόρυφες μετατοπίσεις (ή γενικότερα μετατοπίσεις παράλληλες με τις πλευρές των τετραγώνων) είναι αρκετές για να μετακινήσουμε ένα τετράγωνο σε οποιοδήποτε άλλο.



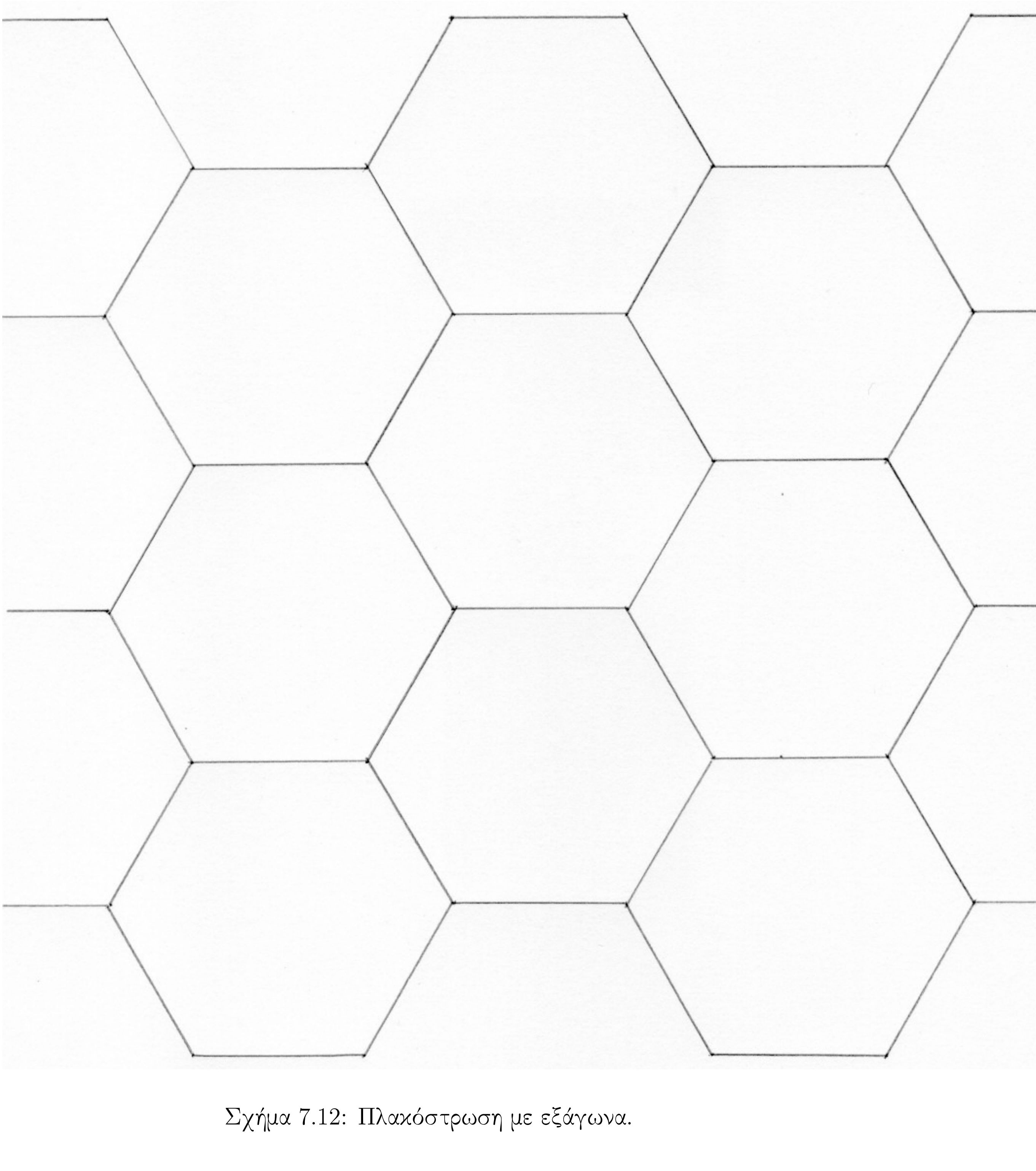
Σχήμα 7.10: Πλακόστρωση με τετράγωνα.

Για την πλακόστρωση με ισόπλευρα τρίγωνα δεν είναι τόσο απλό. Ας χρωματίσουμε τα τρίγωνα της πλακόστρωσης, όπως στο Σχήμα 7.11 ανάλογα με το αν 'δείχνουν πάνω ή κάτω'. Μετατοπίσεις παράλληλες με τις πλευρές των τριγώνων μπορούν να πάνε κάθε τρίγωνο σε οποιοδήποτε τρίγωνο του ιδίου χρώματος, αλλά δεν μπορούν να το πάνε σε τρίγωνο του άλλου χρώματος. Το ίδιο ισχύει για τις περιστροφές κατά 120^o γύρω από το κέντρο ενός τριγώνου. Όμως περιστροφές κατά 60^o γύρω από μία κορυφή απεικονίζουν τα τρίγωνα του ενός χρώματος σε τρίγωνα του άλλου χρώματος. Συνθέτοντας μετατοπίσεις παράλληλες με τις πλευρές του τριγώνου και περιστροφές γύρω από μία κορυφή μπορούμε να μετακινήσουμε ένα τρίγωνο σε οποιοδήποτε άλλο.



Σχήμα 7.11: Πλακόστρωση με ισόπλευρα τρίγωνα.

Άσκηση 7.8



Σχήμα 7.12: Πλακόστρωση με εξάγωνα.