ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Υπόδειγμα Θεμάτων
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ234 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

Παρατηρήσεις

1. ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ να έχετε ΚΙΝΗΤΑ ή ΚΟΜΠΙΟΥΤΕΡΑΚΙΑ στο χώρο της εξέτασης. Σύμφωνα με τον κανονισμό του Τμήματος εάν κατά τη διάρκεια της εξέτασης έχετε πάνω ή δίπλα σας, τσάντες, σημειώσεις, βιβλία, κινητό (έστω και απενεργοποιημένο) ή άλλη ηλεκτρονική συσκευή, αποκλείεστε από όλες τις εξετάσεις της πρώτης εξεταστικής περιόδου του επόμενου εξαμήνου.

2. Διαβάστε προσεκτικά τα θέματα πριν αρχίσετε να απαντάτε. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι σαφείς, σύντομες και αιτιολογημένες.

3. Γράψτε σε διαφορετική σελίδα την απάντηση κάθε θέματος. Συνιστάται να γράφετε τις απαντήσεις μόνο στη δεξιά σελίδα, και να χρησιμοποιείτε την αριστερή για πρόχειρους υπολογισμούς (ή το αντίθετο αν είστε αριστερόχειρες).

4. Πρέπει να παραδώσετε όλες τις κόλλες που χρησιμοποιήσατε και να επιδείξετε πάσο ή ταυτότητα.

5. Η εξέταση διαρκεί 150 λεπτά. Τα πρώτα 30 λεπτά της εξέτασης απαγορεύεται η έξοδος ή η αποχώρηση από την εξέταση.

6. Οι βαθμοί δίδονται σε παρένθεση. Ο μέγιστος βαθμός είναι 100.

ΘΕΜΑ 1. (30) Δίδεται το διάγραμμα κόμβου D στο Σχήμα 1.

Υπολογίστε την περιέλιξη του διαγράμματος D.

Θεωρώντας δεδομένο οτι το τριφύλι με θετικές διασταυρώσεις έχει πολυώνυμο $\langle T\rangle = A^{-7} - A^{-3} - A^{5}$, υπολογίστε το πολυώνυμο $\langle D\rangle$ του διαγράμματος D.

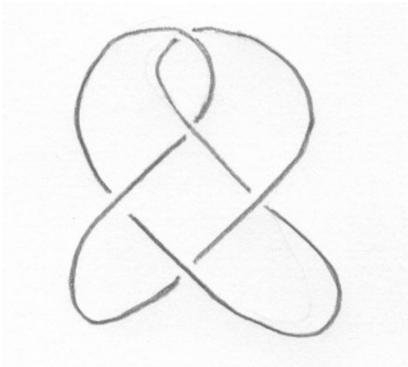
Είναι ο κόμβος που αντιστοιχεί στο διάγραμμα D ισοτοπικός με την ανάκλασή του;

Consider the knot diagram D in Figure 1.

Calculate the writhe of the diagram D.

Given that the trefoil with positive crossings has polynomial $\langle T\rangle = A^{-7} - A^{-3} - A^{5}$, calculate the polynomial $\langle D\rangle$ of diagram D.

Is the knot corresponding to diagram D isotopic to its reflection?



Σχήμα 1: Το διάγραμμα D.

ΘΕΜΑ 2. (30) Εάν X είναι τοπολογικός χώρος, τότε ο *κώνος στο* X είναι ο χώρος πηλίκο $CX = X \times I/\sim$, όπου $\sim$ είναι η σχέση ισοδυναμίας που παράγεται από τις ταυτίσεις

$$(x,\,1) \sim (y,\,1) \text{ για κάθε } x,\, y \in X\,.$$

α΄. Δείξτε οτι ο χώρος πηλίκο CX είναι συνεκτικός κατά δρόμους.

β΄. Δείξτε οτι εάν ο X είναι χώρος Hausdorff, τότε CX είναι επίσης χώρος Hausdorff.

γ΄. Δείξτε οτι εάν ο X είναι συμπαγής, τότε CX είναι επίσης συμπαγής.

If X is a topological space, then the *cone* on X is the quotient space $CX = X \times I/\sim$, where $\sim$ is the equivalence relation generated by

$$(x,\,1) \sim (y,\,1) \text{ for every } x,\, y \in X\,.$$

1. Show that the quotient space CX is path connented.
2. Show that if X is a Hausdorff space, then CX is also Hausdorff.
3. Show that if X is compact, then CX is also compact.

ΘΕΜΑ 3. (30) Δίδονται τα 10 τρίγωνα

134	145	156	167	137
237	256	245	234	267

Κατασκευάστε το δωδεκάγωνο P_{10}, και βρείτε το σύμβολο. Μετατρέψτε το σύμβολο σε κανονική μορφή και βρείτε ποιά επιφάνεια προκύπτει από τις ταυτίσεις των πλευρών του πολυγώνου.

Υπόδειξη: Μεταξύ των τροποποιήσεων που μπορεί να χρειαστείτε είναι οι

$$A_k\, D\, x\, E\, x\, F \dashrightarrow A_k\, z\, z\, D\, E^{-1}\, F$$

$$A\,C_k\,F\,a\,G\,b\,H\,a^{-1}\,I\,b^{-1}\,J \dashrightarrow A\,C_k\,e\,f\,e^{-1}\,f^{-1}\,F\,I\,H\,G\,J$$

$$A\,x\,x\,a\,b\,a^{-1}\,b^{-1}\,G \dashrightarrow A\,y\,y\,d\,d\,c\,c\,G\,.$$

Given the 10 triangles

134	145	156	167	137
237	256	245	234	267

construct the dodecagon P_{10}, and find its symbol. Transform the symbol to standard form, and find the surface obtained by the identifications of the sides of the polygon.

Remark: Among the transformations you may need, are the following

$$A_k\,D\,x\,E\,x\,F \dashrightarrow A_k\,z\,z\,D\,E^{-1}\,F$$

$$A\,C_k\,F\,a\,G\,b\,H\,a^{-1}\,I\,b^{-1}\,J \dashrightarrow A\,C_k\,e\,f\,e^{-1}\,f^{-1}\,F\,I\,H\,G\,J$$

$$A\,x\,x\,a\,b\,a^{-1}\,b^{-1}\,G \dashrightarrow A\,y\,y\,d\,d\,c\,c\,G\,.$$

ΘΕΜΑ 4. (20) Εάν σ είναι δρόμος στον τοπολογικό χώρο X, βρείτε ομοτοπία δρόμων $G : \sigma(1) \sim \sigma^{-1} \cdot \sigma$.

Βρείτε μία συστολή παραμόρφωσης του προβολικού επιπέδου μείον ένα σημείο, $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \setminus \{x_0\}$ σε έναν υπόχωρο $A \subseteq \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ ο οποίος είναι ομοιομορφικός με τον κύκλο, $A \cong S^1$.

If σ is a path in the space X, find a path homotopy $G : \sigma(1) \sim \sigma^{-1} \cdot \sigma$.

Find a deformation retraction of the projective plane minus a point, $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \setminus \{x_0\}$ to a subspace $A \subseteq \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ which is homeomorphic to the circle, $A \cong S^1$.