ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 234 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 1

Τοπολογικές πολλαπλότητες

Άσκηση 1.1 Show that any open subset of $\mathbb{R}^2$ is a topological 2-manifold. (A subset A of $\mathbb{R}^2$ is open if for every $x \in A$ there is $\varepsilon > 0$ such that for every $y \in \mathbb{R}^2$, $|x-y| < \varepsilon \Rightarrow y \in A$.)

Δείξτε οτι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ είναι τοπολογική 2-πολλαπλότητα. (Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^2$ είναι ανοικτό εάν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $y \in \mathbb{R}^2$, $|x-y| < \varepsilon \Rightarrow y \in A$.)

Άσκηση 1.2 Let $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 < r_1^2\}$, $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 < r_2^2\}$ be two discs in $\mathbb{R}^2$. Find a homeomorphism $f : D_1 \longrightarrow D_2$.

Θεωρήστε δύο δίσκους $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 < r_1^2\}$, $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 < r_2^2\}$ στο $\mathbb{R}^2$. Βρείτε έναν ομοιομορφισμό $f : D_1 \longrightarrow D_2$.

Άσκηση 1.3 On the unit sphere $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ consider the equivalence relation $(x, y, z) \sim (-x, -y, -z)$, and let $\mathbb{P}$ be the set of equivalence classes, so that an element of $\mathbb{P}$ is a set $\{(x, y, z), (-x, -y, -z)\}$.
The mapping $p : S^2 \longrightarrow \mathbb{P}$ is not injective, but if we restrict to any open hemisphere, it is injective. Use the images of the subsets U_u, U_r, U_f of S^2, to define a 2-manifold structure on the set $\mathbb{P}$.
The set $\mathbb{P}$ with this topological structure is the ***projective plane***.

Στη μοναδιαία σφαίρα $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ θεωρήστε τη σχέση ισοδυναμίας $(x, y, z) \sim (-x, -y, -z)$, και το σύνολο $\mathbb{P}$ των κλάσεων ισοδυναμίας, έτσι ώστε ένα στοιχείο του $\mathbb{P}$ είναι ένα σύνολο $\{(x, y, z), (-x, -y, -z)\}$.
Η απεικόνιση $p : S^2 \longrightarrow \mathbb{P}$ δεν είναι ένα προς ένα, αλλά εάν την περιορίσουμε σε κάποιο ανοικτό ημισφαίριο, τότε είναι ένα προς ένα. Χρησιμοποιήστε τις εικόνες των υποσυνόλων U_u, U_r, U_f του S^2, για να ορίσετε τη δομή 2-πολλαπλότητας στο $\mathbb{P}$.
Το σύνολο $\mathbb{P}$ με αυτή τη τοπολογική δομή είναι το ***προβολικό επίπεδο***.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Δείξτε οτι για το ημισφαίριο $U_u = \{(x, y, z) \in S^2 : z > 0\}$, η απεικόνιση $p|_{U_u}$ είναι 1–1. Η εικόνα της, $V_u = p(U_u)$, περιέχει όλα τα σημεία του $\mathbb{P}$ για τα οποία $z \neq 0$.

Δείξτε οτι η απεικόνιση $\varphi_u : V_u \longrightarrow B^2$, $\varphi_u(\pm(x, y, z)) = \frac{z}{|z|}(x, y)$, είναι καλά ορισμένη (δηλαδή η τιμή της δεν εξαρτάται από την επιλογή του αντιπροσώπου της κλάσης $\pm(x, y, z)$), και οτι ορίζει ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων (chart) στο $\mathbb{P}$.

Βρείτε αντίστοιχες απεικονίσεις $\varphi_f : V_f \longrightarrow B^2$ και $\varphi_r : V_r \longrightarrow B^2$ χρησιμοποιώντας τα ημισφαίρια $U_f = \{(x,\, y,\, z) \in S^2 : x > 0\}$ και $U_r = \{(x,\, y,\, z) \in S^2 : y > 0\}$. Δείξτε οτι τα V_u, V_f και V_r καλύπτουν το σύνολο $\mathbb{P}$.

Για να δείξουμε οτι οι απεικονίσεις φ_u, φ_f και φ_r αποτελούν άτλαντα, και ορίζουν τη δομή τοπολογικής πολλαπλότητας στο $\mathbb{P}$, πρέπει να δείξουμε οτι οι απεικονίσεις αλλαγής μεταβλητής (transition functions) είναι συνεχείς. Υπολογίστε την απεικόνιση $\varphi_u^{-1} : B^2 \longrightarrow V_u$. Υπολογίστε την απεικόνιση αλλαγής μεταβλητής $\varphi_r \circ \varphi_u^{-1} : \varphi_u(V_u \cap V_r) \longrightarrow \varphi_r(V_u \cap V_r)$ και δείξτε οτι είναι συνεχής.

Βρείτε τις αντίστοιχες απεικονίσεις αλλαγής μεταβλητών $\varphi_f \circ \varphi_u^{-1}$ και $\varphi_f \circ \varphi_r^{-1}$.

Άσκηση 1.4 We have defined the torus as a 2-manifold structure on the set $S^1 \times S^1$. We'll show that the torus is homeomorphic to the surface of revolution $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^3$ with equation

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2\,, \quad a > r > 0\,,$$

with the relative topology as a subset of $\mathbb{R}^3$:
Use the mapping $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ defined by

$$(s,\, t) \longmapsto ((a + r\cos t\pi)\cos s\pi,\, (a + r\cos t\pi)\sin s\pi,\, r\sin t\pi)$$

to define a continuous bijective mapping $S^1 \times S^1 \longrightarrow \mathcal{R}$, which has a continuous inverse.

Έχουμε ορίσει τη σπείρα ως μία δομή 2-πολλαπλότητας στο σύνολο $S^1 \times S^1$. Θα δείξουμε οτι η σπείρα είναι ομοιομορφική με την επιφάνεια εκ περιστροφής $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^3$ με εξίσωση

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2\,, \quad a > r > 0\,,$$

με τη σχετική τοπολογία ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$:
Χρησιμοποιήστε την απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως

$$(s,\, t) \longmapsto ((a + r\cos t\pi)\cos s\pi,\, (a + r\cos t\pi)\sin s\pi,\, r\sin t\pi)$$

για να ορίσετε μία συνεχή αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $S^1 \times S^1 \longrightarrow \mathcal{R}$, που έχει συνεχές αντίστροφο.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Ελέγξτε οτι η εικόνα της f βρίσκεται στην (r). Δείξτε οτι ο περιορισμός της f στο κλειστό τετράγωνο $I^2 = [-1,\, 1] \times [-1,\, 1]$ είναι επιμορφισμός, και ο περιορισμός στο ανοικτό τετράγωνο $J^2 = (-1,\, 1) \times (-1,\, 1)$ είναι 1–1.

Στη σπείρα έχουμε ορίσει το σύνολο U_1 και την απεικόνιση $h_1 : U_1 \longrightarrow J^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Ορίζουμε τη ζητούμενη απεικόνιση $\psi : S^1 \times S^1 \longrightarrow \mathcal{R}$ να είναι ίση με την $f \circ h_1$ στο U_1. Δείξτε οτι εάν ορίσετε ανάλογα την ψ στα υποσύνολα U_2, U_3, U_4, έχετε μία καλά ορισμένη απεικόνιση από το $S^1 \times S^1$ στο $\mathcal{R}$. Δείξτε οτι η απεικόνιση ψ είναι αμφιμονοσήμαντη.

Δείξτε οτι οι απεικονίσεις ψ και ψ^{-1} είναι συνεχείς. Δηλαδή για $i = 1,\, \ldots,\, 4$, η $\psi \circ h_i^{-1}$ και η $h_i \circ \psi^{-1}$ είναι συνεχείς στο σύνολο στο οποίο ορίζονται.