ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 234 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 1

Τοπολογικές πολλαπλότητες

Άσκηση 1.1 Show that any open subset of $\mathbb{R}^2$ is a topological 2-manifold. (A subset A of $\mathbb{R}^2$ is open if for every $x \in A$ there is $\varepsilon > 0$ such that for every $y \in \mathbb{R}^2$, $|x - y| < \varepsilon \Rightarrow y \in A$.)

Δείξτε οτι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ είναι τοπολογική 2-πολλαπλότητα. (Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^2$ είναι ανοικτό εάν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $y \in \mathbb{R}^2$, $|x - y| < \varepsilon \Rightarrow y \in A$.)

Άσκηση 1.2 Let $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 < r_1^2\}$, $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 < r_2^2\}$ be two discs in $\mathbb{R}^2$. Find a homeomorphism $f : D_1 \longrightarrow D_2$.

Θεωρήστε δύο δίσκους $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 < r_1^2\}$, $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 < r_2^2\}$ στο $\mathbb{R}^2$. Βρείτε έναν ομοιομορφισμό $f : D_1 \longrightarrow D_2$.

Άσκηση 1.3 On the unit sphere $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ consider the equivalence relation $(x, y, z) \sim (-x, -y, -z)$, and let $\mathbb{P}$ be the set of equivalence classes, so that an element of $\mathbb{P}$ is a set $\{(x, y, z), (-x, -y, -z)\}$.
The mapping $p : S^2 \longrightarrow \mathbb{P}$ is not injective, but if we restrict to any open hemisphere, it is injective. Use the images of the subsets U_u, U_r, U_f of S^2, to define a 2-manifold structure on the set $\mathbb{P}$.
The set $\mathbb{P}$ with this topological structure is the ***projective plane***.

Στη μοναδιαία σφαίρα $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ θεωρήστε τη σχέση ισοδυναμίας $(x, y, z) \sim (-x, -y, -z)$, και το σύνολο $\mathbb{P}$ των κλάσεων ισοδυναμίας, έτσι ώστε ένα στοιχείο του $\mathbb{P}$ είναι ένα σύνολο $\{(x, y, z), (-x, -y, -z)\}$.
Η απεικόνιση $p : S^2 \longrightarrow \mathbb{P}$ δεν είναι ένα προς ένα, αλλά εάν την περιορίσουμε σε κάποιο ανοικτό ημισφαίριο, τότε είναι ένα προς ένα. Χρησιμοποιήστε τις εικόνες των υποσυνόλων U_u, U_r, U_f του S^2, για να ορίσετε τη δομή 2-πολλαπλότητας στο $\mathbb{P}$.
Το σύνολο $\mathbb{P}$ με αυτή τη τοπολογική δομή είναι το ***προβολικό επίπεδο***.

Άσκηση 1.4 We have defined the torus as a 2-manifold structure on the set $S^1 \times S^1$. We'll show that the torus is homeomorphic to the surface of revolution $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^3$ with equation

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2 \,, \quad a > r > 0 \,,$$

with the relative topology as a subset of $\mathbb{R}^3$:
Use the mapping $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ defined by

$$(s,\, t) \longmapsto ((a + r\cos t\pi)\cos s\pi,\, (a + r\cos t\pi)\sin s\pi,\, r\sin t\pi)$$

to define a continuous bijective mapping $S^1 \times S^1 \longrightarrow \mathcal{R}$, which has a continuous inverse.

Έχουμε ορίσει τη σπείρα ως μία δομή 2-πολλαπλότητας στο σύνολο $S^1 \times S^1$. Θα δείξουμε οτι η σπείρα είναι οποιομορφική με την επιφάνεια εκ περιστροφής $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^3$ με εξίσωση

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2\,, \quad a > r > 0\,,$$

με τη σχετική τοπολογία ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$:
Χρησιμοποιήστε την απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως

$$(s,\, t) \longmapsto ((a + r\cos t\pi)\cos s\pi,\, (a + r\cos t\pi)\sin s\pi,\, r\sin t\pi)$$

για να ορίσετε μία συνεχή αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $S^1 \times S^1 \longrightarrow \mathcal{R}$, που έχει συνεχές αντίστροφο.