ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 234 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 2

Τοπολογία και συνεχείς απεικονίσεις

Άσκηση 2.1 On the set with two elements $X = \{0, 1\}$ we define three different topologies: the discrete topology $\mathcal{D} = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$, the Sierpinski topology $\mathcal{S} = \{\varnothing, \{0\}, \{0, 1\}\}$ and the indiscrete topology $\mathcal{I} = \{\varnothing, \{0, 1\}\}$.
Let $f : X \longrightarrow X$ be the identity mapping on the set X. In which of the following cases is f continuous?

α′) $(X, \mathcal{I}) \longrightarrow (X, \mathcal{D})$, β′) $(X, \mathcal{D}) \longrightarrow (X, \mathcal{I})$,
γ′) $(X, \mathcal{D}) \longrightarrow (X, \mathcal{S})$, δ′) $(X, \mathcal{S}) \longrightarrow (X, \mathcal{D})$,
ε′) $(X, \mathcal{I}) \longrightarrow (X, \mathcal{S})$, ϛ′) $(X, \mathcal{S}) \longrightarrow (X, \mathcal{I})$.

$(X, \mathcal{S})$ is called the Sierpinski space. It is a space with two points, one of which is “open”.

Στο σύνολο με δύο στοιχεία $X = \{0, 1\}$ ορίζουμε τρεις διαφορετικές τοπολογίες: τη διακριτή τοπολογία $\mathcal{D} = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$, την τοπολογία Sierpinski $\mathcal{S} = \{\varnothing, \{0\}, \{0, 1\}\}$ και την τετριμμένη τοπολογία $\mathcal{I} = \{\varnothing, \{0, 1\}\}$.
Θεωρήστε την ταυτοτική απεικόνιση $f : X \longrightarrow X$ στο σύνολο X. Σε ποιές από τις ακόλουθες περιπτώσεις είναι η f συνεχής;

α′) $(X, \mathcal{I}) \longrightarrow (X, \mathcal{D})$, β′) $(X, \mathcal{D}) \longrightarrow (X, \mathcal{I})$,
γ′) $(X, \mathcal{D}) \longrightarrow (X, \mathcal{S})$, δ′) $(X, \mathcal{S}) \longrightarrow (X, \mathcal{D})$,
ε′) $(X, \mathcal{I}) \longrightarrow (X, \mathcal{S})$, ϛ′) $(X, \mathcal{S}) \longrightarrow (X, \mathcal{I})$.

$(X, \mathcal{S})$ ονομάζεται χώρος Sierpinski. Είναι ο χώρος με δύο σημεία, από τα οποία το ένα είναι ‘ανοικτό’.

Άσκηση 2.2 On the interval $[0, 1]$ with the relative topology as a subset of $\mathbb{R}$, which of the following sets are open? Which are closed?

α′) $[0, 1]$, β′) $[0, 1/2)$, γ′) $(0, 1/2)$ δ′) $[1/3, 1)$.

Στο διάστημα $[0, 1]$ με τη σχετική τοπολογία ως υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ποιά από τα ακόλουθα σύνολα είναι ανοικτά; Ποιά είναι κλειστά;

α′) $[0, 1]$, β′) $[0, 1/2)$, γ′) $(0, 1/2)$ δ′) $[1/3, 1)$.

Άσκηση 2.3 Let X be a set and let $\{A_i : i \in \mathcal{A}\}$ be a family of subsets of X. Show that

α′) $X \setminus \left(\bigcup_{i\in\mathcal{A}} A_i\right) = \bigcap_{i\in\mathcal{A}}(X \setminus A_i)\,,$ β′) $X \setminus \left(\bigcap_{i\in\mathcal{A}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathcal{A}}(X \setminus A_i)\,.$

Θεωρήστε σύνολο X και οικογένεια $\{A_i : i \in \mathcal{A}\}$ υποσυνόλων του X. Δείξτε οτι

α′) $X \setminus \left(\bigcup_{i\in\mathcal{A}} A_i\right) = \bigcap_{i\in\mathcal{A}}(X \setminus A_i)\,,$ β′) $X \setminus \left(\bigcap_{i\in\mathcal{A}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathcal{A}}(X \setminus A_i)\,.$

Άσκηση 2.4 Let X, Y be sets, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ and $f : X \longrightarrow Y$ a mapping. Show that

$$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)\,.$$

Find examples to show that $f(X \setminus A)$ is not necessarily equal to $Y \setminus f(A)$.
Show that if f is injective, then $f(X \setminus A) \subseteq Y \setminus f(A)$.
Show that if f is surjective, then $Y \setminus f(A) \subseteq f(X \setminus A)$.

Θεωρήστε σύνολα X, Y, με υποσύνολα $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ και απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$. Δείξτε οτι

$$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)\,.$$

Βρείτε παραδείγματα για να δείξετε οτι $f(X \setminus A)$ δεν είναι πάντα ίσο με $Y \setminus f(A)$.
Δείξτε οτι εάν f ις ένα προς ένα, τότε $f(X \setminus A) \subseteq Y \setminus f(A)$.
Δείξτε οτι εάν f ις επί, τότε $Y \setminus f(A) \subseteq f(X \setminus A)$.

Άσκηση 2.5 Show that a mapping between topological spaces $g : X \longrightarrow Y$ is continuous if and only if for every closed subset $F \subseteq Y$, $g^{-1}(F)$ is closed in X.

Δείξτε οτι μία απεικόνιση μεταξύ τοπολογικών χώρων $g : X \longrightarrow Y$ είναι συνεχής εάν και μόνον εάν για κάθε κλειστό υποσύνολο $F \subseteq Y$, $g^{-1}(F)$ είναι κλειστό στο X.