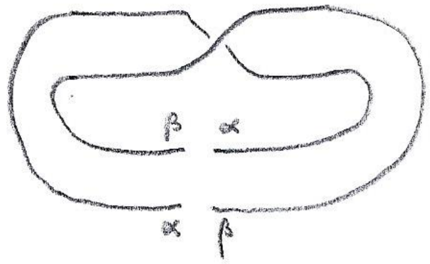
6.1.

1. Θεωρούμε δύο παράλληλα strings, α και β.

Εισάγουμε ένα αρνητικό half-twist,

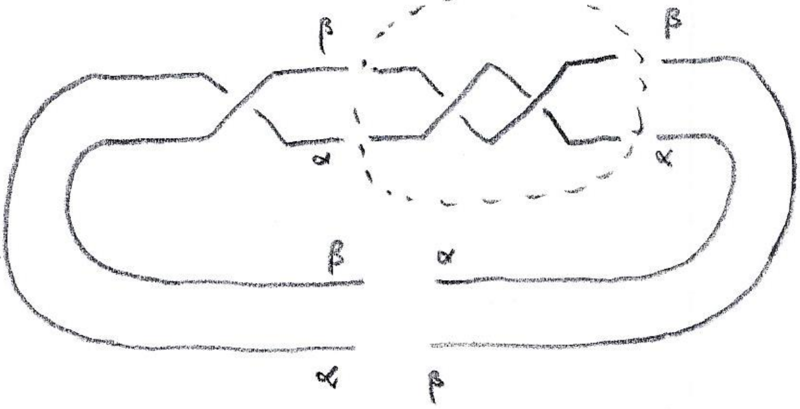
και ενώνουμε.



Το α ενώνεται με το β, και έχουμε ένα διάγραμμα με μία συνιστώσα, δηλαδή ένα κόμβο.

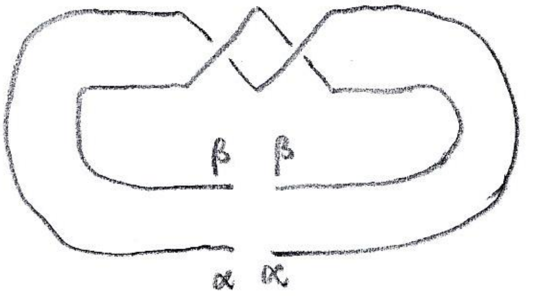
$T_{2,1}$ είναι ο τυλιγμένος κόμβος με 1 αρνητικό half twist, δηλαδή V_{-1}.

Εαν προσθέσουμε άλλα δύο αρνητικά half twists, πάλι το α ενώνεται με το β, και έχουμε διάγραμμα με μία συνιστώσα



Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία παίρνουμε τα διαγράμματα για $T_{2,3}$, $T_{2,5}$, ..., $T_{2,n}$ για n περιττό, που έχουν όλα μία συνιστώσα.

Εάν κάνουμε το ίδιο ξεκινώντας με δύο αρνητικά half-twists, το α ενώνεται με το α και το β με το β, ώστε να έχουμε διάγραμμα με δύο συνιστώσες.

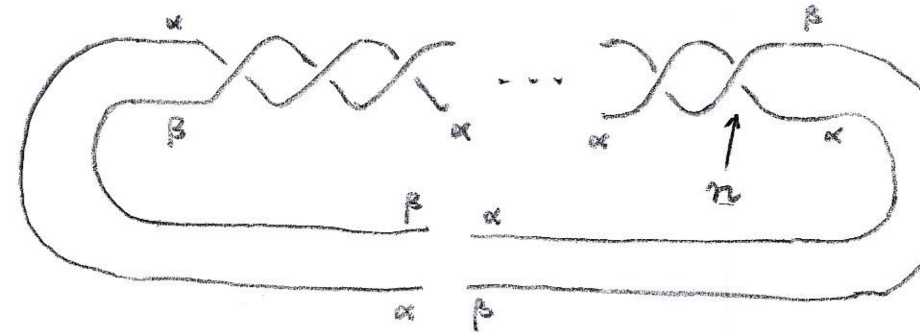


$T_{2,2}$

Προσθέτοντας 2 half twists, παίρνουμε πάλι διάγραμμα με 2 συνιστώσες. Άρα $T_{2,n}$ για n άρτιο είναι σύνδεσμος με 2 συνιστώσες.

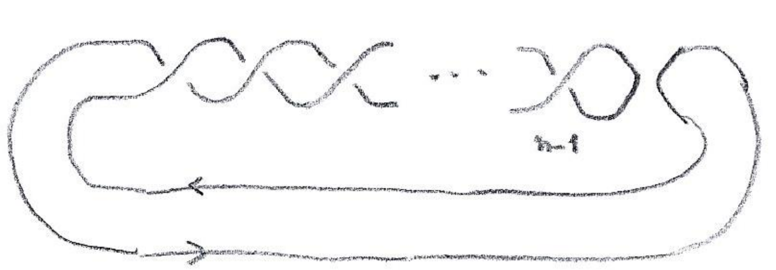
2. Για n περιττό,

$T_{2,n}$



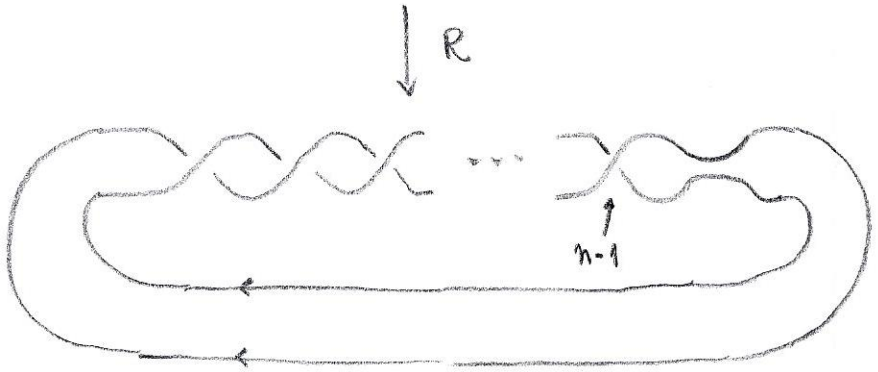
Ανοίγουμε στη διασταύρωση n, προς τα αριστερά.

$\swarrow L$



και έχουμε τον πεπλεγμένο κόμβο με $n-1$ <u>θετικά</u> half twists, V_{n-1}

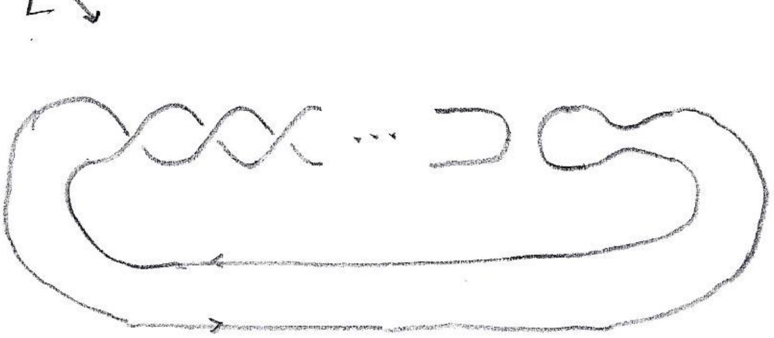
Ανοίγουμε στη διασταύρωση n προς τα δεξιά,



και έχουμε το σύνδεσμο $T_{2,n-1}$.

Ανοίγουμε το $T_{2,n-1}$ στη διασταύρωση $n-1$, προς τα αριστερά,

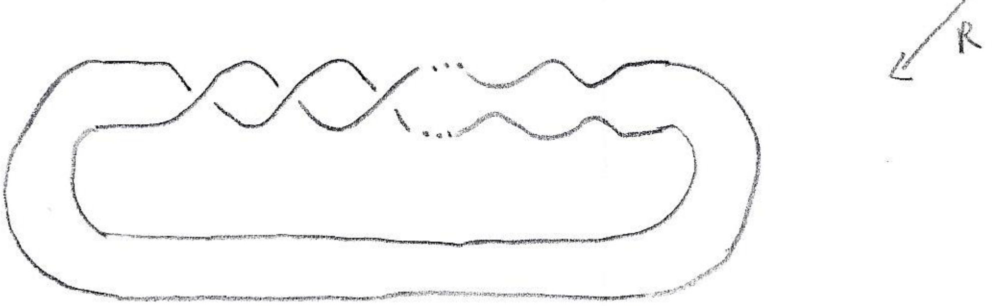
και έχουμε V_{n-2}



Ανοίγουμε το $T_{2,n-1}$ στη διασταύρωση $n-1$ προς τα δεξιά

και έχουμε

$T_{2,n-2}$



Άρα, για τα πολυώνυμα bracket έχουμε τη σχέση :

$$\langle T_{2,n} \rangle = A \langle V_{n-1} \rangle + A^{-1} \langle T_{2,n-1} \rangle$$

$$= A \langle V_{n-1} \rangle + A^{-1} \left(A \langle V_{n-2} \rangle + A^{-1} \langle T_{2,n-2} \rangle \right)$$

Αντικαθιστούμε $\langle V_{n-1} \rangle = (-A^3)^{n-1}$, $\langle V_{n-2} \rangle = (-A^3)^{n-2}$

και έχουμε

$$\langle T_{2,n} \rangle = A (-A^{-3})^{n-1} + (-A^3)^{n-2} + A^{-2} \langle T_{2,n-2} \rangle$$

Αφού n είναι περιττός, έχουμε την αναδρομική σχέση

$$\langle T_{2,n} \rangle = A^{3n-2} - A^{3n-6} + A^{-2} \langle T_{2,n-2} \rangle$$

για τα πολυώνυμα bracket.

Η περιέλιξη $w(T_{2,n}) = -n$, $w(T_{2,n-2}) = 2-n$

και το πολυώνυμο Kaufmann είναι:

$$f[T_{2,n}] = (-A)^{3n} \langle T_{2,n} \rangle$$

$$= -A^{6n-2} + A^{6n-6} - A^{3n-2} \langle T_{2,n-2} \rangle$$

ενώ $f[T_{2,n-2}] = -A^{3n-6} \langle T_{2,n-2} \rangle$.

Άρα

$$f[T_{2,n}] = -A^{6n-2} + A^{6n-6} + A^4 f[T_{2,n-2}]$$

Για να βρούμε την αναδρομική σχέση για τα πολυώνυμα Jones, $V_{T_{2,n}}(t) = f[T_{2,n}](t^{-1/4})$,

δηλαδή:

$$V_{T_{2,n}}(t) = -\left(t^{-1/4}\right)^{6n-2} + \left(t^{-1/4}\right)^{6n-6} + \left(t^{-1/4}\right)^{4} V_{T_{2,n-2}}(t)$$

$$= -t^{\frac{1-3n}{2}} + t^{\frac{3-3n}{2}} + t^{-1} V_{T_{2,n-2}}(t).$$

Επαληθεύουμε για $n = 3, 5, 7$.

6.2. Γνωρίζουμε ότι κάθε σύνδεσμος με c διασταυρώσεις μπορεί να μετατραπεί στον U_c αλλάζοντας πάνω περάσματα σε κάτω περάσματα.

Εαν L_1 προέρχεται από τον σύνδεσμο L με μία τέτοια αλλαγή, από τις σχέσεις για το bracket έχουμε

$$\langle L \rangle (A) = \langle L_1 \rangle (A^{-1}).$$

Κάθε τέτοια αλλαγή επίσης αλλάζει την περιέλιξη κατά ± 2. Δείχνουμε ότι η τιμή των πολυωνύμων Jones στο $t=1$, δεν μεταβάλλεται από τέτοιες αλλαγές. Άρα $V_L(1) = V_{U_c}(1)$.