ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ 234 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

Φυλλάδιο Προβλημάτων 8

Νέοι τοπολογικοί χώροι.

Άσκηση 8.1 Show that the topological space $C = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$ is homeomorphic to the topological product $S^1 \times [0, 1]$, (the cylinder).

Δείξτε οτι ο τοπολογικός χώρος $C = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$ είναι ομοιομορφικός με το τοπολογικό γινόμενο $S^1 \times [0, 1]$, (τον κύλινδρο).

Άσκηση 8.2 Show that $S^1 \times \mathbb{R} \cong \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Δείξτε οτι $S^1 \times \mathbb{R} \cong \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Άσκηση 8.3 On $\mathbb{R}$ we define the equivalence relation $s \sim t$ if $s - t \in \mathbb{Z}$. Show that $\mathbb{R}/\sim$ is homeomorphic to the circle, and that the projection is an open mapping.

Στο $\mathbb{R}$ ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας $s \sim t$ εάν $s - t \in \mathbb{Z}$. Δείξτε οτι $\mathbb{R}/\sim$ είναι ομοιομορφικό με τον κύκλο, και οτι η προβολή είναι ανοικτή απεικόνιση.

Άσκηση 8.4 On $\mathbb{R}^2$ we define the equivalence relation $(s, t) \sim (p, q)$ if $(s-p, t-q) \in \mathbb{Z}^2$. Show that $\mathbb{R}^2/\sim$ is homeomorphic to the torus $S^1 \times S^1$, and that the projection is an open mapping.

Στο $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας $(s, t) \sim (p, q)$ εάν $(s-p, t-q) \in \mathbb{Z}^2$. Δείξτε οτι $\mathbb{R}^2/\sim$ είναι ομοιομορφικό με τη σπείρα $S^1 \times S^1$, και οτι η προβολή είναι ανοικτή απεικόνιση.

Άσκηση 8.5 On the closed unit disk $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ we define the equivalence relation generated by $z \sim 1$ if $|z| = 1$. Show that $\Delta/\sim$ is homeomorphic to the unit sphere S^2. Consider the set $\{z \in \Delta : \operatorname{Re} z > 0\}$ to show that the projection is not an open mapping.

Στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας που παράγεται από τις σχέσεις $z \sim 1$ εάν $|z| = 1$. Δείξτε οτι $\Delta/\sim$ είναι ομοιομορφικό προς τη μοναδιαία σφαίρα S^2. Θεωρήστε το σύνολο $\{z \in \Delta : \operatorname{Re} z > 0\}$ για να δείξετε οτι η προβολή δεν είναι ανοικτή απεικόνιση.

Άσκηση 8.6 On the closed unit disk $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ we define the equivalence relation generated by $z \sim w$ if $z = -w$. Show that $\Delta/\sim$ is homeomorphic to the projective plane $\mathbb{R}P^2$.

Στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας που παράγεται από τις σχέσεις $z \sim w$ εάν $z = -w$. Δείξτε οτι $\Delta/\sim$ είναι ομοιομορφικό προς το προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$.