Σύνοψη Κεφαλαίου 2: Ομοπαραλληλική Γεωμετρία

Γεωμετρία και μετασχηματισμοί

1. Μία ισομετρία του $\mathbb{R}^2$ είναι μία απεικόνιση από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^2$ που διατηρεί αποστάσεις. Κάθε ισομετρία του $\mathbb{R}^2$ έχει μία από τις ακόλουθες μορφές:

- μετατόπιση κατά μήκος μίας ευθείας στο $\mathbb{R}^2$
- ανάκλαση σε μία ευθεία το $\mathbb{R}^2$
- περιστροφή γύρω από ένα σημείο στο $\mathbb{R}^2$
- μία σύνθεση από μετατοπίσεις, ανακλάσεις και περιστροφές στο $\mathbb{R}^2$.

Το σύνολο όλων των ισομετριών του $\mathbb{R}^2$ αποτελεί μία ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων· ειδικότερα, η σύνθεση δύο ισομετριών είναι ισομετρία.

2. Η Ευκλείδεια γεωμετρία είναι η μελέτη αυτών των ιδιοτήτων των σχημάτων που παραμένουν αμετάβλητες από την ομάδα ισομετριών.
Αυτές οι ιδιότητες ονομάζονται Ευκλείδειες ιδιότητες, και περιλαμβάνουν την απόσταση, τη γωνία, τη συγγραμμικότητα σημείων και την ιδιότητα ευθειών να συντρέχουν στο ίδιο σημείο.

3. Η σκοπιά του Klein στη γεωμετρία είναι η ιδέα οτι η γεωμετρία μπορεί να θεωρηθεί ως η μελέτη μίας ομάδας μετασχηματισμών που δρα σε ένα χώρο.

4. Οι μετασχηματισμοί του $\mathbb{R}^2$ που δίδονται από

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}, \text{ και}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

είναι ισομετρίες και αναπαριστούν, αντίστοιχα, την περιστροφή γύρω από το σημείο αναφοράς κατά γωνία ϑ αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού και κατόπιν μετατόπιση κατά το διάνυσμα $(e,\, f)$ την ανάκλαση σε μία ευθεία που περνάειαπό το σημείο αναφοράς και σχηματίζει γωνία $\frac{\vartheta}{2}$ με τον x-άξονα και κατόπιν μετατόπιση κατά το διάνυσμα $(e,\, f)$.
Κάθε ισομετρία έχει μία από αυτές τις δύο μορφές.

5. Ένας Ευκλείδειος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^2$ είναι μία απεικόνιση $t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ της μορφής $t(x) = Ux + a$, όπου U είναι ορθογώνιος 2×2 πίνακας και $a \in \mathbb{R}^2$. Το σύνολο όλων των Ευκλείδειων μετασχηματισμών του $\mathbb{R}^2$ συμβολίζεται $E(2)$.

6. Κάθε ισομετρία του $\mathbb{R}^2$ είναι Ευκλείδειος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^2$, και το αντίστροφο.

7. Το σύνολο όλων των Ευκλείδειων μετασχηματισμών του $\mathbb{R}^2$ αποτελεί μία ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων.

8. Η αντίστροφη απεικόνιση ενός Ευκλείδειου μετασχηματισμού $t(x) = Ux + a$ δίδεται από $t^{-1}(x) = U^{-1}x - U^{-1}a$.

9. Η Ευκλείδεια γεωμετρία είναι η μελέτη αυτών των ιδιοτήτων των σχημάτων που παραμένουν αμετάβλητες από Ευκλείδειους μετασχηματισμούς του $\mathbb{R}^2$.

10. Ένα σχήμα F_1 είναι ίσο στην Ευκλείδεια γεωμετρία με ένα σχήμα F_2 εάν υπάρχει ένας Ευκλείδειος μετασχηματισμός που απεικονίζει το F_1 στο F_2.
Η ισότητα στην Ευκλείδεια γεωμετρία είναι μία σχέση ισοδυναμίας.
Ένα σχήμα F_1 είναι G-ισοδύναμο με ένα σχήμα F_2 σε κάποια γεωμετρία ορισμένη από μία ομάδα μετασχηματισμών G που δρουν στο χώρο της γεωμετρίας εάν υπάρχει ένας μετασχηματισμός στην G που απεικονίζει το F_1 στο F_2.
Η G-ισοδυναμία είναι μία σχέση ισοδυναμίας.

Ομοπαραλληλικοί μετασχηματισμοί και παράλληλες προβολές

1. Ένας ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^2$ είναι μία απεικόνιση $t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ της μορφής $t(x) = Ax + b$, όπου A είναι αντιστρέψιμος 2×2 πίνακας και $b \in \mathbb{R}^2$. Το σύνολο όλων των ομοπαραλληλικών μετασχηματισμών του $\mathbb{R}^2$ συμβολίζεται $A(2)$.
Κάθε Ευκλείδειος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^2$ είναι ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός.

2. Το σύνολο όλων των ομοπαραλληλικών μετασχηματισμών $A(2)$ αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων.
Η αντίστροφη απεικόνιση ενός ομοπαραλληλικού μετασχηματισμού $t(x) = Ax + b$ δίδεται από $t^{-1}(x) = A^{-1}x - A^{-1}b$.

3. Η ομοπαραλληλική γεωμετρία είναι η μελέτη αυτών των ιδιοτήτων των σχημάτων (που ονομάζονται ομοπαραλληλικές ιδιότητες) οι οποίες παραμένουν αμετάβλητες από ομοπαραλληλικούς μετασχηματισμούς του $\mathbb{R}^2$.
Βασικές ιδιότητες ομοπαραλληλικών μετασχηματισμών: Οι ομοπαραλληλικοί μετασχηματισμοί

α΄. απεικονίζουν ευθείες γραμμές σε ευθείες γραμμές

β΄. απεικονίζουν παράλληλες ευθείες σε παράλληλες ευθείες

γ΄. διατηρούν το λόγο των μηκών κατά μήκος μίας ευθείας γραμμής.

4. Μία παράλληλη προβολή είναι μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του $\mathbb{R}^2$ στο εαυτό του που ορίζεται ως εξής: Θεωρούμε π_1 και pi_2 επίπεδα στο $\mathbb{R}^3$, και παράλληλες ακτίνες φωτός που τα διαπερνούν. Τότε τη απεικόνιση p που στέλνει κάθε σημείο P τοψ π_1 στο αντίστοιχο σημείο P' τοψ π_2 είναι η παράλληλη προβολή από το π_1 στο π_2.
Εάν τα επίπεδα π_1 και π_2 είναι παράλληλα, τότε η παράλληλη προβολή από το π_1 στο π_2 είναι ισομετρία.

5. Βασικές ιδιότητες παράλληλων προβολών: Οι παράλληλες προβολές

α΄. απεικονίζουν ευθείες γραμμές σε ευθείες γραμμές

β΄. απεικονίζουν παράλληλες ευθείες σε παράλληλες ευθείες

γ΄. διατηρούν το λόγο των μηκών κατά μήκος μίας ευθείας γραμμής.

6. Διάμετρος μίας έλλειψης είναι μία χορδή της έλλειψης που περνάει από το κέντρο.

Θεώρημα μέσων. Έστω ℓ μία χορδή μιας έλλειψης. Τότε τα μέσα των χορδών που είναιμ παράλληλες προς την ℓ βρίσκονται σε μία διάμετρο της έλλειψης.

7. Θεώρημα συζυγών διαμέτρων. Έστω ℓ μία διάμετρος μιας έλλειψης. Τότε υπάρχει μία άλλη διάμετρος m της έλλειψης τέτοια ώστε

α′. τα μέσα όλων των χορδών που είναι παράλληλες προς την ℓ βρίσκονται στην m.

β′. τα μέσα όλων των χορδών που είναι παράλληλες προς την m βρίσκονται στην ℓ.

Οι διευθύνσεις αυτών των δύο διαμέτρων ονομάζονται συζυγείς διευθύνσεις, και οι διάμετροι ονομάζονται συζυγείς διάμετροι.

8. Για μία δεδομένη έλλειψη, υπάρχει παράλληλη προβολή που απεικονίζει την έλλειψη σε έναν κύκλο.

9. Κάποιες ιδιότητες των σχημάτων, όπως τα μήκη και οι γωνίες, δεν διατηρούνται από παράλληλες προβολές. Αυτή είναι μία διαφορά μεταξύ της Ευκλείδειας και της ομοπαραλληλικής γεωμετρίας.

10. Κάθε παράλληλη προβολή είναι ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός. Όμως ένας ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός δεν είναι απαραιτήτως παράλληλη προβολή: για παράδειγμα η απεικόνιση διπλασιασμού, $t(v) = 2v$ είναι ένας ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^2$ που δεν αποτελεί παράλληλη προβολή.

11. Ένας ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός t προσδιορίζεται απόλυτα από τις εικόνες των τριών μη συγγραμμικών σημείων $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(0, 1)$. Άρα εάν γνωρίζουμε τα σημεία στα οποία απεικονίζει ο t τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(0, 1)$, μπορούμε να προσδιορίσουμε τον πίνακα A και το διάνυσμα b στην έκφραση $t(x) = Ax + b$.

12. Κάθε ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση δύο παράλληλων προβολών.

Ιδιότητες ομοπαραλληλικών μετασχηματισμών

1. Μέθοδος: Για να βρούμε την εικόνα μίας ευθείας ή μίας κωνικής στο $\mathbb{R}^2$ από έναν ομοπαραλληλικό μετασχηματισμό $t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ που ορίζεται από $t(x) = Ax + b$, συμβολίζουμε x το σημείο με συντεταγμένες (x, y) στο πεδίο ορισμού και x' με συντεταγμένες (x', y') στο πεδίο τιμών. Τότε

α′. Εκφράζουμε τη σχέση μεταξύ των x και x' στη μορφή $x = A^{-1}x' - A^{-1}b$

β′. Βρίσκουμε εκφράσεις για τα x και y συναρτήσει των x' και y'

γ′. Αντικαθιστούμε με αυτές τις εκφράσεις τα x και y στην εξίσωση της ευθείας ή της κωνικής

δ′. Αφαιρούμε τους τόνους από τα x' και y'.

Η εξίσωση που προκύπτει είναι η εξίσωση της εικόνας από τον t.

2. Μέθοδος: Για να προσδιορίσουμε τον μοναδικό ομοπαραλληλικό μετασχηματισμό $t(x) = Ax + b$ που απεικονίζει τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(0, 1)$ στα τρία μη συγγραμμικά σημεία p, q και r, αντίστοιχα,

α′. Θέτουμε $b = p$

β′. Θεωρούμε τον πίνακα A με στήλες τα διανύσματα $q - p$ και $r - p$.

Παρατήρηση: Αυτή η μέθοδος ισχύει μόνο όταν τα p, q και r δεν είναι συγγραμμικά. Εάν είναι συγγραμμικά, τότε ο πίνακας A που περιγράφεται στη Μέθοδο δεν είναι αντιστρέψιμος και συνεπώς ο μετασχηματισμός που δίδει η Μέθοδος δεν είναι ομοπαραλληλικός.

3. Θεμελιώδες Θεώρημα Ομοπαραλληλικής Γεωμετρίας. Θεωρούμε p, q, r και p', q', r' δύο σύνολα από τρία μη συγγραμμικά σημεία στο $\mathbb{R}^2$. Τότε

α′. υπάρχει ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός t που απεικονίζει τα σημεία p, q και r στα p', q' και r', αντίστοιχα

β′. αυτός ο ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός είναι μοναδικός.

Μέθοδος:Για να προσδιορίσουμε τον ομοπαραλληλικό μετασχηματισμό t που απεικονίζει τα μη συγγραμμικά σημεία p, q και r στα μη συγγραμμικά σημεία p', q' και r', αντίστοιχα

α′. Προσδιορίζουμε τον ομοπαραλληλικό μετασχηματισμό t_1 που απεικονίζει τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(0, 1)$ στα σημεία p, q και r, αντίστοιχα

β′. Προσδιορίζουμε τον ομοπαραλληλικό μετασχηματισμό t_2 που απεικονίζει τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(0, 1)$ στα σημεία p', q' και r', αντίστοιχα

γ′. Υπολογίζουμε τη σύνθεση $t = t_2 \circ t_1^{-1}$.

4. Δύο σχήματα είναι ομοπαραλληλικά ισοδύναμα εάν υπάρχει ένας ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός που απεικονίζει το ένα στο άλλο.

Όλα τα τρίγωνα είναι ομοπαραλληλικά ισοδύναμα.

5. Ένας ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός διατηρεί τους λόγους μηκών κατά μήκος παράλληλων ευθειών.

Εφαρμογές του Θεμελιώδους Θεωρήματος

1. Θεώρημα Διαμέσων. Οι διάμεσοι ενός τριγώνου τέμνονται σε ένα σημείο.

2. Το σημείο R διαιρεί το διάστημα PQ σε λόγο $(1 - \lambda) : \lambda$ εάν $\frac{PR}{RQ} = \frac{1-\lambda}{\lambda}$. Το μέγεθος του λόγου είναι ισο με το λόγο των μηκών των PR, RQ, και ο λόγος είναι θετικός εάν $0 < \lambda < 1$, οπότε $\overrightarrow{PR}$ και $\overrightarrow{RQ}$ είναι ομόρροπα, ενώ είναι αρνητικός όταν $\lambda < 0$ ή $\lambda > 1$, οπότε $\overrightarrow{PR}$ και $\overrightarrow{RQ}$ είναι αντίρροπα.

Εάν τα P, Q, R έχουν συντεταγμένες (x_P, y_P), (x_Q, y_Q) και (x_R, y_R) αντίστοιχα, τότε $\frac{PR}{RQ} = \frac{x_R - x_P}{x_Q - x_R}$ και $\frac{PR}{RQ} = \frac{y_R - y_P}{y_Q - y_R}$. Εάν ένας από τους παρονομαστές είναι μηδέν, χρησιμοποιούμε το άλλο κλάσμα για τον υπολογισμό.

3. Θεώρημα Ceva. Θεωρούμε τρίγωνο ABC και σημείο X που δεν βρίσκεται σε κάποια από τις επεκτεταμένες πλευρές του τριγώνου. Εάν AX τέμνει την BC στο P, BX τέμνει την CA στο Q και CX τέμνει την AB στο R, τότε

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1\,.$$

4. Αντίστροφο Θεωρήματος Ceva. Θεωρούμε σημεία P, Q και R, διαφορετικά από τις κορυφές, στις επεκτεταμένες πλευρές BC, CA και AB του τριγώνου ABC, τέτοια ώστε $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$. Τότε οι ευθείες AP, BQ και CR τέμνονται σε ένα σημείο.

5. Θεώρημα Μενελάου. Θεωρούμε τρίγωνο ABC και ευθεία ℓ η οποία τέμνει τις επεκτεταμένες πλευρές του τριγώνου BC, CA και AB σε τρία διαφορετικά σημεία P, Q και R αντίστοιχα. Τότε $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1$.

6. Αντίστροφο Θεωρήματος Μενελάου. Θεωρούμε σημεία P, Q και R, διαφορετικά από τις κορυφές, στις επεκτεταμένες πλευρές BC, CA και AB του τριγώνου ABC, τέτοια ώστε $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1$. Τότε τα σημεία P, Q και R βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

7. Πολλά αποτελέσματα για ιδιότητες τριγώνων που διατηρούνται από ομοπαραλληλικούς μετασχηματισμούς (όπως οι σχέσεις σημείων και ευθειών, η παραλληλία, οι λόγοι μηκών πάνω στην ίδια ευθεία) αποδεικνύονται με την ακόλουθη μέθοδο.
Πρώτα επιλέγουμε ένα κατάλληλο τρίγωνο, στο οποίο είναι εύκολο να αποδειχθεί το αποτέλεσμα. Κατόπιν, επικαλούμενοι την ύπαρξη ομοπαραλληλικού μετασχηματισμού που απεικονίζει αυτό το τρίγωνο σε οποιοδήποτε άλλο, συμπεραίνουμε οτι το αποτέλεσμα ισχύει για κάθε τρίγωνο.

Ομοπαραλληλικοί μετασχηματισμοί και κωνικές

1. Κάθε έλλειψη είναι ομοπαραλληλικά ισοδύναμη με τον μοναδιαίο κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$.
Κάθε υπερβολή είναι ομοπαραλληλικά ισοδύναμη με την ορθή υπερβολή με εξίσωση $xy = 1$.
Κάθε παραβολή είναι ομοπαραλληλικά ισοδύναμη με την παραβολή με εξίσωση $y^2 = x$.

2. Ομοπαραλληλικοί μετασχηματισμοί απεικονίζουν ελλείψεις σε ελλείψεις, παραβολές σε παραβολές και υπερβολές σε υπερβολές.
Στην Ομοπαραλληλική Γεωμετρία:

α΄. Όλες οι ελλείψεις είναι ισοδύναμες

β΄. Όλες οι υπερβολές είναι ισοδύναμες

γ΄. Όλες οι παραβολές είναι ισοδύναμες

Μη εκφυλισμένες κωνικές είναι ισοδύναμες μόνο με μη εκφυλισμένες κωνικές του ίδιου τύπου.

3. Εάν t είναι ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός και C είναι έλλειψη ή υπερβολή με κέντρο P, τότε $t(C)$ είναι έλλειψη ή υπερβολή με κέντρο $t(P)$.

4. Εάν t είναι ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός και H είναι υπερβολή με ασύμπτωτες ℓ_1 και ℓ_2, τότε $t(H)$ είναι υπερβολή με ασύμπτωτες $t(\ell_1)$ και $t(\ell_2)$.

5. Εάν t είναι ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός και ℓ είναι εφαπτομένη στην κωνική C, τότε $t(\ell)$ είναι εφαπτομένη στην κωνική $t(C)$.

6. Στην ομοπαραλληλική γεωμετρία μπορούμε να μελετήσουμε προβλήματα με κωνικές που αναφέρονται σε ομοπαραλληλικές ιδιότητες. Χρησιμοποιούμε έναν ομοπαραλληλικό μετασχηματισμό για να απεικονίσουμε την κωνική σε μία από τις κανονικές μορφές, λύνουμε το πρόβλημα σε αυτήν την περίπτωση και μετά επιστρέφουμε στην αρχική κωνική.

7. Για κάθε υπερβολή και σημείο P της υπερβολής υπάρχει ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός που απεικονίζει την υπερβολή στην ορθή υπερβολή $xy = 1$, και το σημείο P στο $(1, 1)$.