Σύνοψη Κεφαλαίου 3: Προβολική Γεωμετρία

Προοπτική

1. Εάν π_1 και π_2 είναι δύο επίπεδα που δεν περνάνε από την αρχή O στο $\mathbb{R}^3$, λέμε οτι τα σημεία P στο π_1 και Q στο π_2 βρίσκονται σε προοπτική από το O εάν η ευθεία από το P στο Q περνάει από το O.

2. Μία κεντρική προβολή από το π_1 στο π_2 με κέντρο στο O είναι η απεικόνιση που στέλνει το σημείο P του π_1 στο σημείο Q του π_2 όποτε τα σημεία P και Q βρίσκονται σε προοπτική από το O. (Τα επίπεδα π_1 και π_2 μπορεί να βρίσκονται στην ίδια ή σε αντίθετες πλευρές του O.)

3. Το πεδίο ορισμού μίας κεντρικής προβολής μπορεί να μην είναι όλο το π_1: εάν P είναι τέτοιο ώστε OP είναι παράλληλη στο επίπεδο π_2, το P δεν έχει εικόνα στο π_2.
Η εικόνα μίας ευθείας από μία κεντρική προβολή είναι μία ευθεία, ίσως μείον ένα σημείο.

Το προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$

1. Ένα προβολικό σημείο είναι μία ευθεία στο $\mathbb{R}^3$ που περνάει από την αρχή του $\mathbb{R}^3$.
Το προβολικό επίπεδο είναι το σύνολο όλων αυτών των προβολικών σημείων.

2. Η έκφραση $[a, b, c]$ όπου οι αριθμοί a, b, c δεν είναι όλοι 0, αναπαριστά ένα προβολικό σημείο P του $\mathbb{R}P^2$ που αποτελείται από τη μοναδική ευθεία του $\mathbb{R}^3$ που περνάει από το $(0, 0, 0)$ και το (a, b, c). Λέμε οτι $[a, b, c]$ είναι οι ομογενείς συντεταγμένες του προβολικού σημείου P.
Εάν (a, b, c) είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος v, μπορούμε να συμβολίσουμε το προβολικό σημείο P με $[v]$. Τότε λέμε οτι το προβολικό σημείο P αντιπροσωπεύεται από το διάνυσμα v.
Η έκφραση $[0, 0, 0]$ δεν έχει νόημα, αφού οι αριθμοί a, b, c δεν μπορούν να είναι όλοι μηδέν.

3. Οι ομογενείς συντεταγμένες $[a, b, c]$ και $[\lambda a, \lambda b, \lambda c]$, όπου $\lambda \neq 0$, αναπαριστούν το ίδιο προβολικό σημείο στο $\mathbb{R}P^2$, $[a, b, c] = [\lambda a, \lambda b, \lambda c]$ για $\lambda \neq 0$.
Εάν δεν υπάρχει μη μηδενικός αριθμός λ τέτοιος ώστε $[a, b, c] = [\lambda a', \lambda b', \lambda c']$, οι ομογενείς συντεταγμένες $[a, b, c]$ και $[a', b', c']$ αναπαριστούν διαφορετικά σημεία του $\mathbb{R}P^2$.
Επίσης, $[a, b, 1] = [a', b', 1]$ εάν και μόνον εάν $a = a'$ και $b = b'$.

4. Ένα προβολικό σχήμα είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}P^2$.

5. Μία προβολική ευθεία στο $\mathbb{R}P^2$ είναι ένα επίπεδο στο $\mathbb{R}^3$ που περνάει από την αρχή.
Προβολικά σημεία είναι συγγραμμικά εάν βρίσκονται σε μία προβολική ευθεία.

6. Η γενική εξίσωση μίας προβολικής ευθείας στο $\mathbb{R}P^2$ είναι $ax + by + cz = 0$, όπου a, b, c δεν είναι όλα μηδέν.

7. Ιδιότητα συγγραμμικότητας: Κάθε δύο προβολικά σημεία στο $\mathbb{R}P^2$ βρίσκονται σε μία μοναδική προβολική ευθεία.
Μέθοδος: Για να προσδιορίσουμε την εξίσωση της προβολικής ευθείας στην οποία βρίσκονται τα προβολικά σημεία $[d, e, f]$ και $[g, h, k]$,

α′. γράφουμε την εξίσωση $\begin{vmatrix} x & y & z \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 0$

β′. αναπτύσσουμε την ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή, για να βρουμε τη ζητούμενη εξίσωση στη μορφή $ax + by + cz = 0$.

Μερικές φορές μπορούμε να ''δούμε'' την εξίσωση μίας προβολικής ευθείας χωρίς να υπολογίσουμε στην ορίζουσα.

8. Μέθοδος: Για να προσδιορίσουμε εάν τρία προβολικά σημεία $[a, b, c]$, $[d, e, f]$ και $[g, h, k]$ είναι συγγραμμικά

α′. υπολογίζουμε την ορίζουσα $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$

β′. Τα προβολικά σημεία $[a, b, c]$, $[d, e, f]$ και $[g, h, k]$ είναι συγγραμμικά εάν και μόνον εάν η ορίζουσα είναι 0.

9. Τα προβολικά σημεία $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ και $[0, 0, 1]$ ονομάζονται το τρίγωνο αναφοράς. Το προβολικό σημείο $[1, 1, 1]$ ονομάζεται μοναδιαίο σημείο.

10. Ιδιότητα σύμπτωσης στο $\mathbb{R}P^2$: Καθε δύο προβολικές ευθείες στο $\mathbb{R}P^2$ τέμνονται σε ένα μοναδικό προβολικό σημείο του $\mathbb{R}P^2$.

11. Έστω π επίπεδο στο $\mathbb{R}^3$ που δεν περνάει από την αρχή O. Τότε υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του π και των προβολικών σημείων του $\mathbb{R}P^2$ που τέμνουν το επίπεδο π. Τα προβολικά σημεία του $\mathbb{R}P^2$ που δεν τέμνουν το π λέγονται ιδεατά σημεία του π.

12. Ένα επίπεδο εμφύτευσης είναι ένα επίπεδο π που δεν περνάει από την αρχή, μαζί με το σύνολο όλων των ιδεατών σημείων του π.
Το επίπεδο στο $\mathbb{R}^3$ με εξίσωση $z = 1$ ονομάζεται κανονικό επίπεδο εμφύτευσης. Η απεικόνιση του $\mathbb{R}P^2$ στο κανονικό επίπεδο εμφύτευσης ονομάζεται κανονική εμφύτευση του $\mathbb{R}P^2$.

13. Η παραλληλία δεν είναι προβολική ιδιότητα.

Προβολικοί μετασχηματισμοί

1. Ένας προβολικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}P^2$ είναι μία απεικόνιση $t : \mathbb{R}P^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2$ της μορφής $t : [x] \mapsto [Ax]$, όπου A είναι ένας αντιστρέψιμος 3×3 πίνακας. Λέμε οτι A είναι ο πίνακας που συνδέεται με την απεικόνιση t. Το σύνολο όλων των προβολικών μετασχηματισμών συμβολίζεται $P(2)$.
Εάν ο πίνακας A συνδέεται με τον t, τότε για κάθε μη μηδενικό αριθμό λ, λA επίσης συνδέεται με τον μετασχηματισμό t.

2. Το σύνολο των προβολικών μετασχηματισμών $P(2)$ αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων. Ειδικότερα, εάν t_1 και t_2 είναι προβολικοί μετασχηματισμοί συνδεδεμένοι με τους πίνακες A_1 και A_2, αντίστοιχα, τότε $t_1 \circ t_2$ και t^{-1} είναι προβολικοί μετασχηματισμοί

συνδεδεμένοι με τους πίνακες A_1A_2 και A^{-1}.
Μέθοδος: Για να συνθέσουμε τους προβολικούς μετασχηματισμούς t_1 και t_2:

α΄. γράφουμε τους πίνακες A_1 και A_2 που συνδέονται με τους t_1 και t_2,

β΄. υπολογίζουμε το γινόμενο A_1A_2,

γ΄. γράφουμε τη σύνθεση t_1t_2 που συνδέεται με τον A_1A_2.

Μέθοδος: Για να βρούμε τον αντίστροφο του προβολικού μετασχηματισμού t:

α΄. γράφουμε τον πίνακα A που συνδέεται με τον t,

β΄. υπολογίζουμε τον A^{-1},

γ΄. γράφουμε τον t^{-1} που συνδέεται με τον A^{-1}.

3. Μέθοδος: Για να βρούμε την εικόνα της προβολικής ευθείας $ax + by + cz = 0$ από τον προβολικό μετασχηματισμό $t : [x] \mapsto [Ax]$:

α΄. γράφουμε την εξίσωση της προβολικής ευθείας στη μορφή $Lx = 0$, όπου L είναι ο πίνακας $[a\ b\ c]$,

β΄. βρίσκουμε έναν πίνακα B συνδεδεμένο με τον t,

γ΄. γράφουμε την εξίσωση της εικόνας $(LB)x = 0$.

4. Η προβολική γεωμετρία είναι η μελέτη των ιδιοτήτων των σχημάτων στο $\mathbb{R}P^2$ που είναι αναλλοίωτες από προβολικούς μετασχηματισμούς.
Η συγγραμμικότητα σημείων και οι ιδιότητες τομής ευθειών είναι προβολικές ιδιότητες.

5. Ένα προβολικό τετράπλευρο είναι ένα σύνολο από τέσσερα προβολικά σημεία A, B, C και D, κάθε τρία από τα οποία δεν είναι συγγραμμικά, μαζί με τις προβολικές ευθείες AB, BC, CD και DA.
Όλα τα προβολικά τετράπλευρα είναι προβολικά ισοδύναμα.

6. Μέθοδος: Για να βρούμε τον προβολικό μετασχηματισμό που απεικονίζει το $[1, 0, 0]$ στο $[a_1, a_2, a_3]$, το $[0, 1, 0]$ στο $b_1, b_2, b_3]$, το $[0, 0, 1]$ στο $[c_1, c_2, c_3]$, το $[1, 1, 1]$ στο $[d_1, d_2, d_3]$, όπου κάθε τρία από τα $[a_1, a_2, a_3]$, $b_1, b_2, b_3]$, $[c_1, c_2, c_3]$, $[d_1, d_2, d_3]$ δεν είναι συγγραμμικά,

α΄. βρίσκουμε u, v, w τέτοια ώστε $\begin{bmatrix} a_1u & b_1v & c_1w \\ a_2u & b_2v & c_2w \\ a_3u & b_3v & c_3w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$,

β΄. γράφουμε το ζητούμενο προβολικό μετασχηματισμό στη μορφή $t : [x] \mapsto [Ax]$, όπου A είναι οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του πίνακα $\begin{bmatrix} a_1u & b_1v & c_1w \\ a_2u & b_2v & c_2w \\ a_3u & b_3v & c_3w \end{bmatrix}$.

7. Θεμελιώδες Θεώρημα Προβολικής Γεωμετρίας. Θεωρούμε δύο προβολικά τετράπλευρα $ABCD$ και $A'B'C'D'$ στο $\mathbb{R}P^2$. Τότε:

α΄. υπάρχει προβολικός μετασχηματισμός t που απεικονίζει το A στο A', το B στο B', το C στο C' και το D στο D', β′. ο μετασχηματισμός t είναι μοναδικός.

8. Μέθοδος: Για να βρούμε τον προβολικό μετασχηματισμό που απεικονίζει τις κορυφές του τετραπλεύρου $ABCD$ στις αντίστοιχες κορυφές του τετραπλεύρου $A'B'C'D'$:

α′. βρίσκουμε τον προβολικό μετασχηματισμό t_1 που απεικονίζει το τρίγωνο αναφοράς και το μοναδιαίο σημείο στα προβολικά σημεία A, B, C, D αντίστοιχα,

β′. βρίσκουμε τον προβολικό μετασχηματισμό t_2 που απεικονίζει το τρίγωνο αναφοράς και το μοναδιαίο σημείο στα προβολικά σημεία A', B', C', D' αντίστοιχα,

γ′. υπολογίζουμε τον $t = t_2 \circ t_1^{-1}$.

9. Για κάθε κεντρική προβολή σ μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν μετασχηματισμό προοπτικής, δηλαδή μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το $\pi \cup \{$ιδεατά προβολικά σημεία του $\pi\}$ στο $\pi' \cup \{$ιδεατά προβολικά σημεία του $\pi'\}$. Αυτός είναι μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του $\mathbb{R}P^2$ στον εαυτό του.
Κάθε προβολικός μετασχηματισμός εκφράζεται ως σύνθεση τριών μετασχηματισμών προοπτικής.

Εφαρμογές του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Προβολικής Γεωμετρίας

1. Θεώρημα Desargues. Θεωρούμε τρίγωνα ABC και $A'BC'$ στο $\mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε οι ευθείες AA', BB' και CC' τέμνονται στο σημείο U. Εάν BC και $B'C'$ τέμνονται στο P, CA και $C'A'$ τέμνονται στο Q, AB και $A'B'$ τέμνονται στο R, τότε τα P, Q και R είναι συγγραμμικά.

2. Το Θεμελιώδες Θεώρημα χρησιμοποιείται συχνά για να απλοποιήσουμε αποδείξεις στην προβολική γεωμετρία, όπου οι εμπλεκόμενες ιδιότητες είναι προβολικές ιδιότητες. Γενικά, δεν αναφερόμαστε ρητά στον αντίστοιχο προβολικό μετασχηματισμό t, αλλά απλώς παρατηρούμε οτι ''Από το Θεμελιώδες Θεώρημα, επιλέγουμε τα τέσσερα σημεία ... (κάθε τρία από τα οποία δεν είναι συγγραμμικά) να είναι το τρίγωνο αναφοράς και το μοναδιαίο σημείο, με ομογενείς συντεταγμένες $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$ και $[1, 1, 1]$''.

3. Θεώρημα Πάππου. Θεωρούμε τρία σημεία A, B και C σε μία ευθεία στο $\mathbb{R}^2$, και A', B' και C' τρία σημεία σε μία άλλη ευθεία. Εάν BC' και BC τέμνονται στο P, CA' και $C'A$ τέμνονται στο Q, AB' και $A'B$ τέμνονται στο R, τότε τα P, Q και R είναι συγγραμμικά.

4. Κάθε Ευκλείδειο σχήμα σε ένα επίπεδο εμφύτευσης αντιστοιχεί σε ένα προβολικό σχήμα στο $\mathbb{R}P^2$. Έπεται οτι ένα Ευκλείδειο θεώρημα που αναφέρεται σε προβολικές ιδιότητες (όπως η συγγραμμικότητα ή η σύμπτωση σημείων) ισχύει εάν και μόνο εάν ισχύει το αντίστοιχο προβολικό θεώρημα.

Ο διπλός λόγος

1. Θεωρούμε τέσσερα συγγραμμικά προβολικά σημεία A, B, C, D στο $\mathbb{R}P^2$, που αντιπροσωπεύονται από τα (συνεπίπεδα) διανύσματα a, b, c, d στο $\mathbb{R}^3$, και αριθμούς α, β, γ, δ τέτοιους ώστε $c = \alpha a + \beta b$ και $d = \gamma a + \delta b$. Ορίζουμε το διπλό λόγο των A, B, C, D να είναι $(ABCD) = \frac{\beta}{\alpha} \Big/ \frac{\delta}{\gamma}$.
Ο διπλός λόγος $(ABCD)$ δεν εξαρτάται από την επιλογή των διανυσμάτων που αντιπροσωπεύουν τα προβολικά σημεία A, B, C, D.

2. Θεωρούμε τέσσερα συγγραμμικά προβολικά σημεία A, B, C, D του $\mathbb{R}P^2$, και $(ABCD) = k$. Τότε

$$(BACD) = (ABDC) = \frac{1}{k} \qquad \text{και} \qquad (ACBD) = (DBCA) = 1 - k\,.$$

3. Ο διπλός λόγος είναι αμετάβλητος από προβολικούς μετασχηματισμούς: εάν t είναι προβολικός μετασχηματισμός και A, B, C, D είναι τέσσερα συγγραμμικά προβολικά σημεία στο $\mathbb{R}P^2$, και $A' = t(A)$, $B' = t(B)$, $C' = t(C)$, $D' = t(D)$, τότε $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

4. Εάν A, B, C, D είναι τέσσερα προβολικά σημεία σε μία προβολική ευθεία στο $\mathbb{R}P^2$ και A', B', C', D' είναι τέσσερα προβολικά σημεία σε μία άλλη προβολική ευθεία στο $\mathbb{R}P^2$, τέτοια ώστε οι τέσσερεις προβολικές ευθείες AA', BB', CC', DD' τέμνονται στο ίδιο σημείο U, τότε $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

5. Θεώρημα μοναδικού τέταρτου σημείου. Εάν A, B, C, X, Y είναι συγγραμμικά προβολικά σημεία στο $\mathbb{R}P^2$, τέτοια ώστε $(ABCX) = (ABCY)$, τότε $X = Y$.

6. Εάν A, B, C, D, και A, E, F, G είναι δύο τετράδες από συγγραμμικά προβολικά σημεία στο $\mathbb{R}P^2$, σε δύο διαφορετικές προβολικές ευθείες, τέτοια ώστε $(ABCD) = (AEFG)$. Τότε οι προβολικές ευθείες BE, CF και DG περνάνε απο το ίδιο προβολικό σημείο.

7. Θεωρούμε τέσσερα συγγραμμικά προβολικά σημεία στο $\mathbb{R}P^2$ που διαπερνούν ένα επίπεδο εμφύτευσης στα σημεία A, B, C, D, με διανύσματα θέσης (ως προς το σύστημα αναφοράς του επιπέδου) a, b, c, d αντίστοιχα. Τότε, εάν μπορούμε να εκφράσουμε τα c και d ως $c = \lambda a + (1-\lambda)b$ και $d = \mu a + (1-\mu)b$, έχουμε

$$(ABCD) = \frac{1-\lambda}{\lambda} \Big/ \frac{1-\mu}{\mu} = \frac{AC}{CB} \Big/ \frac{AD}{DB}\,.$$

8. Μέθοδος: Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα επίπεδο εμφύτευσης για να υπολογίσουμε το διπλό λόγο τεσσάρων συγγραμμικών σημείων:

α΄. εάν τα τέσσερα προβολικά σημεία διαπερνούν το επίπεδο εμφύτευσης στα σημεία A, B, C, D αντίστοιχα, τότε $(ABCD) = \frac{AC}{CB} / \frac{AD}{DB}$,

β΄. εάν ένα από τα προβολικά σημεία είναι ιδεατό σημείο για το επίπεδο εμφύτευσης, τότε

$$(ABCD) = \frac{DB}{CB} \quad \text{εάν } A \text{ είναι ιδεατό,}$$

$$(ABCD) = \frac{CA}{DA} \quad \text{εάν } B \text{ είναι ιδεατό,}$$

$$(ABCD) = \frac{BD}{AD} \quad \text{εάν } C \text{ είναι ιδεατό,}$$

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} \quad \text{εάν } D \text{ είναι ιδεατό.}$$

9. Ο διπλός λόγος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μετρήσουμε αποστάσεις στο έδαφος σε αεροφωτογραφίες, αφού ο διπλός λόγος οποιωνδήποτε τεσσάρων σημείων σε μία ευθεία στο έδαφος είναι ίσος με το διπλό λόγο των εικόνων τους στην αεροφωτογραφία.