Σύνοψη Κεφαλαίου 5: Αντιστροφική Γεωμετρία

Αντιστροφή

1. Η ανάκλαση σε μία ευθεία ℓ στο επίπεδο απεικονίζει ένα σημείο A σε ένα σημείο A' που απέχει ίση απόσταση από την ℓ, αλλά βρίσκεται στην άλλη πλευρά της ℓ.

2. Θεωρούμε έναν κύκλο C στο επίπεδο, με κέντρο O και ακτίνα r, και ένα σημείο A διαφορετικό από το O. Το σημείο A' στην ευθεία OA που βρίσκεται στην ίδια πλευρά του O με το A και ικανοποιεί τη σχέση $OA \cdot OA' = r^2$, ονομάζεται αντίστροφο σημείο του A ως προς τον κύκλο C. Το σημείο O ονομάζεται κέντρο της αντιστροφής, και ο κύκλος C κύκλος αντιστροφής. Ο μετασχηματισμός t που ορίζεται $t(A) = A'$, για $A \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ ονομάζεται αντιστροφή στον κύκλο C.
Η αντιστροφή δεν ορίζεται στο σημείο O, και κανένα σημείο δεν απεικονίζεται στο O.
Η αντιστροφή σε κύκλο είναι γενίκευση της ανάκλασης σε ευθεία.
Συχνά χρησινοποιούμε τον όρο αντιστροφή εννοώντας είτε ανάκλαση σε ευθεία είτε αντιστροφή σε κύκλο.

3. Εάν A είναι σημείο στο εξωτερικό του κύκλου C με κέντρο O, AB και AD είναι οι εφαπτόμενες από το A προς τον κύκλο C, και A' είναι το σημείο τομής των OA και BD, τότε A και A' είναι αντίστροφα σημεία ως προς τον κύκλο C.

4. Η αντιστροφή απεικονίζει σημεία στο εξωτερικό του κύκλου C σε σημεία στο εσωτερικό του C και αντίστροφα. Σημεία στον κύκλο C απεικονίζονται στον εαυτό τους.
Η αντιστροφή σε κύκλο είναι μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το επίπεδο χωρίς το κέντρο του κύκλου στον εαυτό του.
Η αντίστροφη απεικόνιση της αντιστροφής σε κύκλο είναι ο εαυτός της, $t^{-1} = t$.

5. Η αντιστροφή δεν είναι ευκλείδειος μετασχηματισμός, για παράδειγμα, δεν διατηρεί τις αποστάσεις.
Η αντιστροφή δεν είναι ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός, για παράδειγμα δεν διατηρεί τις ευθείες γραμμές.

6. Η αντιστροφή στον μοναδιαίο κύκλο $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ είναι η απεικόνιση $t : (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$, όπου $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$.
Μέθοδος: Για να βρούμε την εξίσωση της εικόνας μίας καμπύλης από την αντιστροφή στον κύκλο S^1:

α′. γράφουμε μία εξίσωση σε x και y για τα σημεία της καμπύλης,

β′. αντικαθιστούμε το x με το $\frac{x}{x^2+y^2}$ και το y με το $\frac{y}{x^2+y^2}$, και απλοποιούμε την εξίσωση που προκύπτει.

Εάν η καμπύλη περνάει από το O πρέπει πρώτα να αφαιρέσουμε το σημείο O από την καμπύλη. Όταν αφαιρούμε ένα σημείο A από μία καμπύλη, λέμε οτι η καμπύλη είναι τρυπημένη στο A.

7. Οι εικόνες των ευθειών από την αντιστροφή: Η αντιστροφή σε ένα κύκλο με κέντρο O:

α΄. Απεικονίζει μία ευθεία που δεν περνάει από το O σε ένα κύκλο,

β΄. Απεικονίζει μία ευθεία τρυπημένη στο O στον εαυτό της.

Οι εικόνες κύκλων από την αντιστροφή: Η αντιστροφή σε ένα κύκλο με κέντρο O:

α΄. Απεικονίζει έναν κύκλο που δεν περνάει από το O σε ένα κύκλο,

β΄. Απεικονίζει έναν κύκλο τρυπημένο στο O σε μία ευθεία που δεν περνάει από το O.

Ακόμη και όταν μία αντιστροφή απεικονίζει έναν κύκλο σε έναν κύκλο, μπορεί να μην απεικονίζει το κέντρο του κύκλου στο κέντρο της εικόνας του.

8. Θεωρούμε δύο καμπύλες c_1 και c_2 που τέμνονται στο σημείο A, και τις εφαπτόμενες στο σημείο A, ℓ_1 και ℓ_2 στις δύο καμπύλες αντίστοιχα. Τότε η θετική (αντίθετη με τη φορά στροφής των δεικτών του ρολογιού) γωνία από την c_1 στην c_2 είναι η θετική γωνία από την ℓ_1 στην ℓ_2, και η αρνητική (σύμφωνη με τη φορά των δεικτών του ρολογιού) γωνία από την c_1 στην c_2 είναι η αρνητική γωνία από την ℓ_1 στην ℓ_2.

9. Λήμμα συμμετρίας. Θεωρούμε ευθεία ℓ που δεν περνάει από το O. Τότε η αντιστροφή σε έναν κύκλο με κέντρο O απεικονίζει την ell σε έναν κύκλο C (τρυπημένο στο O) και η εφαπτομένη στον C στο O είναι παράλληλη στην ℓ.

10. Θεώρημα γωνίας. Η αντιστροφή σε ένανκύκλο διατηρεί το μέγεθος των γωνιών μεταξύ καμπυλών, αλλά αντιστρέφει τον προσανατολισμό τους.

Επεκτείνοντας το επίπεδο

1. Ο μετασχηματισμός $t(z) = z + c$, $z \in \mathbb{C}$, όπου $c = a + \mathrm{i}b$, είναι μία μετατόπιση κατά το διάνυσμα (a, b).
Ο μετασχηματισμός $t(z) = \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$, είναι ανάκλαση στον x-άξονα.
Ο μετασχηματισμός $t(z) = az$, $z \in \mathbb{C}$, όπου $|a| = 1$, $a = \cos\vartheta_0 + \mathrm{i}\sin\vartheta_0$, είναι περιστροφή (αντίθετη με τη φορά στροφής των δεικτών του ρολογιού) κατά γωνία ϑ_0 γύρω από το O.
Κάθε ισομετρία του επιπέδου αναπαριστάται στο μιγαδικό επίπεδο από μία από τις απεικονίσεις $t(z) = az + b$ ή $t(z) = a\bar{z} + b$, όπου $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$. Αντίστροφα, όλες αυτές οι απεικονίσεις αναπαριστούν ισομετρίες.
Κάθε ισομετρία εκφράζεται ως σύνθεση ανακλάσεων.

2. Ο μετασχηματισμός $t(z) = kz$, $z \in \mathbb{C}$, όπου k είναι θετικός πραγματικός αριθμός, είναι μία διαστολή με συντελεστή k.

3. Μία αντιστροφή σε κύκλο C με κέντρο (a, b) και ακτίνα r αναπαριστάται στο μιγαδικό επίπεδο από την απεικόνιση $t(z) = \frac{r^2}{\overline{z-c}} + c$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$, όπου $c = a + \mathrm{i}b$.
Ειδικότερα, η αντιστροφή στον μοναδιαίο κύκλο S^1 αναπαριστάται από την απεικόνιση $t(z) = \frac{1}{\bar{z}}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

4. Ένας γραμμικός μετασχηματισμός είναι μία απεικόνιση της μορφής $t(z) = az + b$, $z \in \mathbb{C}$, όπου $a, b \in \mathbb{C}$ και $a \neq 0$. (ΠΡΟΣΟΧΗ, η χρήση της λέξης *γραμμικός* σε αυτή την περίπτωση δεν συμφωνεί με την έννοια της γραμμικής απεικόνισης στη Γραμμική Άλγεβρα.)
Ένας γραμμικός μετασχηματισμός αναλύεται στη σύνθεση $t_2 \circ t_1$, όπου t_1 είναι η διαστολή

$t_1(z) = |a|z$ και $t_2(z) = \frac{a}{|a|}z + b$. Αυτή η σύνθεση περιγράφεται γεωμετρικά ως μία διαστολή κατά $|a|$, μετά μία περιστροφή κατά γωνία $\mathrm{Arg}\,(\frac{a}{|a|})$, και μετά μετατόπιση κατά το διάνυσμα $(\mathrm{Re}\,b,\ \mathrm{Im}\,b)$.
Οι γραμμικοί μετασχηματισμοί διατηρούν τις γωνίες και απεικονίζουν κύκλους σε κύκλους και ευθείες σε ευθείες.

5. Η αναλυτική αντιστροφή είναι η απεικόνιση $t(z) = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Αναλύεται στη σύνθεση $t_2 \circ t_1$, όπου t_1 είναι η (γεωμετρική) αντιστροφή $t_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ και t_2 είναι η συζυγία $t_2(z) = \bar{z}$.
Η αναλυτική αντιστροφή διατηρεί τις γωνίες (σε μέγεθος και προσανατολισμό).

6. Το επεκτεταμένο (μιγαδικό) επίπεδο $\hat{\mathbb{C}}$ είναι η ένωση του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$ και ενός σημείου, του σημείου στο άπειρο, που συμβολίζεται ∞.

7. Μία επεκτεταμένη ευθεία είναι μία ευθεία ℓ του επιπέδου μαζί με το σημείο ∞. Μπορούμε να θεωρήσουμε μία επεκτεταμένη ευθεία ως ένα κύκλο άπειρης διάστασης.
Ένας γενικευμένος κύκλος στο επεκτεταμένο επίπεδο είναι ένα σύνολο που είναι είτε ένας κύκλος είτε μία επεκτεταμένη ευθεία.

8. Θεωρούμε ένα γενικευμένο κύκλο C στο επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο. Η αντιστροφή του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου ως προς τον C είναι μία απεικόνιση t που ορίζεται με έναν από τους ακόλουθους τρόπους:

α′. Εάν C είναι ένας κύκλος με ακτίνα r και κέντρο O,

$$t(A) = \begin{cases} \text{το αντίστροφο του } A \text{ ως προς τον κύκλο } C & \text{εάν } A \in \mathbb{C} \setminus \{O\}\,, \\ \infty & \text{εάν } A = O\,, \\ O & \text{εάν } A = \infty\,. \end{cases}$$

β′. Εάν C είναι η επεκτεταμένη ευθεία $\ell \cup \{\infty\}$,

$$t(A) = \begin{cases} \text{η ανάκλαση του } A \text{ στην ευθεία } \ell & \text{εάν } A \in \mathbb{C}\,, \\ \infty & \text{εάν } A = \infty\,. \end{cases}$$

Αντιστροφές του επεκτεταμένου επιπέδου απεικονίζουν γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους.

9. Η επεκτεταμένη συνάρτηση συζυγίας, η επεκτεταμένη αναλυτική αντιστροφή και επεκτεταμένοι γραμμικοί μετασχηματισμοί ορίζονται με φυσιολογικό τρόπο ως απεικονίσοεις από το $\hat{\mathbb{C}}$ στον εαυτό του.

10. Η επεκτεταμένη αναλυτική αντιστροφή και οι επεκτεταμένοι γραμμικοί μετασχηματισμοί αναλύονται σε συνθέσεις αντιστροφών και απεικονίζουν γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους.

11. Μέθοδος: Η διαστολή του $\hat{\mathbb{C}}$ με συντελεστή k είναι η σύνθεση:

α′. της αντιστροφής στον κύκλο $\{z\,:\,|z| = 1\}$ και

β′. της αντιστροφής στον κύκλο $\{z\,:\,|z| = \sqrt{k}\}$.

Μέθοδος: Η περιστροφή του $\hat{\mathbb{C}}$ κατά γωνία ϑ είναι η σύνθεση:

α′. της αντιστροφής στην ευθεία $\{z\,:\,\mathrm{Arg}\,z = 0\} \cup \{\infty\}$ και

β′. της αντιστροφής στην ευθεία $\{z\,:\,\mathrm{Arg}\,z = \frac{1}{2}\vartheta\} \cup \{\infty\}$.

Μέθοδος: Η μετατόπιση του $\hat{\mathbb{C}}$ κατά το διάνυσμα (a, b) είναι η σύνθεση:

α΄. της αντιστροφής στην ευθεία $\{(x, y) : ax + by = 0\} \cup \{\infty\}$ και

β΄. της αντιστροφής στην ευθεία $\{(x, y) : ax + by = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)\} \cup \{\infty\}$.

Αντιστροφική γεωμετρία

1. Ένας μετασχηματισμός $t : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ είναι ένας αντιστροφικός μετασχηματισμός εάν μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση αντιστροφών.
Η αντιστροφική γεωμετρία είναι ημελέτη των ιδιοτήτων των σχημάτων του $\hat{\mathbb{C}}$ που διατηρούνται αναλλοίωτες από τους αντιστροφικούς μετασχηματισμούς.
Η επεκτεταμένη αναλυτική αντιστροφή και οι επεκτεταμένοι γραμμικοί μετασχηματισμοί είναι αντιστροφικοί μετασχηματισμοί.

2. Οι αντιστροφικοί μετασχηματισμοί διατηρούν το μέγεθος των γωνιών, απεικονίζουν γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους και διατηρούν την ιδιότητα επαφής καμπυλών.
Το σύνολο των αντιστροφικών μετασχηματισμών αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων, που ονομάζεται αντιστροφική ομάδα.

3. Κάθε Ευκλείδειος μετασχηματισμός είναι αντιστροφικός μετασχηματισμός και κάθε αντιστροφική ιδιότητα είναι και Ευκλείδεια ιδιότητα.
Η απεικόνιση διπλασιασμού, $t(z) = 2z$, $z \in \mathbb{C}$, είναι ομοπαραλληλικός και αντιστροφικός μετασχηματισμός, αλλά δεν είναι Ευκλείδειος μετασχηματισμός.

4. Ένας μετασχηματισμός Möbius είναι μία απεικόνιση $t : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ της μορφής $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, όπου $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ και $ad - bc \neq 0$.
Εάν $c = 0$ ορίζουμε $M(\infty) = \infty$. Διαφορετικά ορίζουμε $M(-\frac{d}{c} = \infty$ και $M(\infty) = \frac{a}{c}$.
Η επεκτεταμένη αναλυτική αντιστροφή και οι επεκτεταμένοι γραμμικοί μετασχηματισμοί είναι μετασχηματισμοί Möbius.
Κάθε μετασχηματισμός Möbius είναι αντιστροφικός μετασχηματισμός.

5. Κάθε μετασχηματισμός Möbius διατηρεί το μέγεθος και τον προσανατολισμό των γωνιών και απεικονίζει γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους.

6. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό Möbius $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, όπου $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ και $ad-bc \neq 0$. Λέμε οτι ο πίνακας $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ είναι ένας πίνακας που αντιστοιχεί στον M.
Ένας πίνακας που αντιστοιχεί σε μετασχηματισμό Möbius είναι αντιστρέψιμος.
Εάν ο πίνακας A αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό Möbius M, τότε το ίδιο ισχύει για τον cA για κάθε μη μηδενικό $c \in \mathbb{C}$. Όλοι οι πίνακες που αντιστοιχούν στον μετασχηματισμό M είναι της μορφής cA για κάποιο $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

7. Θεωρούμε μετασχηματισμούς Möbius M_1 και M_2, με αντίστοιχους πίνακες A_1 και A_2. Τότε $M_1 \circ M_2$ είναι μετασχηματισμός Möbius με αντίστοιχο πίνακα A_1A_2.
Μέθοδος: Για να συνθέσουμε τους μετασχηματισμους Möbius M_1 και M_2:

α΄. γράφουμε πίνακες A_1 και A_2 που αντιστοιχούν στους M_1 και M_2,

β΄. υπολογίζουμε τον A_1A_2,

γ΄. γράφουμε το μετασχηματισμό Möbius $M_1 \circ M_2$ που αντιστοιχεί στον πίνακα A_1A_2.

8. Ο αντίστροφος του μετασχηματισμού Möbius $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ είναι επίσης μετασχηματισμός Möbius και γράφεται στη μορφή $M^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$.

9. Το σύνολο των μετασχηματισμών Möbius αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων.

10. Κάθε αντιστροφή έχει τη μορφή $t(z) = M(\bar{z})$, όπου M είναι μετασχηματισμός Möbius.
Κάθε αντιστροφικός μετασχηματισμός t εκφράζεται στο $\hat{\mathbb{C}}$ είτε ως $t(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, είτε ως $t(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, όπου a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ και $ad - bc \neq 0$.
Η σύνθεση ενός άρτιου αριθμού αντιστροφών είναι μετασχηματισμός Möbius και διατηρεί τον προσανατολισμό. Η σύνθεση ενός περιττού αριθμού αντιστροφών αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

Θεμελιώδες Θεώρημα της Αντιστροφικής Γεωμετρίας

1. Θεμελιώδες Θεώρημα της Αντιστροφικής Γεωμετρίας. Θεωρούμε δύο σύνολα τριών σημείων, z_1, z_2, z_3 και w_1, w_2, w_3 στο επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο $\hat{\mathbb{C}}$. Τότε υπάρχει μοναδικός μετασχηματισμός Möbius M που απεικονίζει το z_1 στο w_1, το z_2 στο w_2 και το z_3 στο w_3.

2. Μέθοδος: Για να βρούμε το μετασχηματισμό Möbius M που απεικονίζει τρία σημεία z_1, z_2 και z_3 στα σημεία 0, 1 και ∞, αντίστοιχα:

α′. Επιλέγουμε την κατάλληλη μορφή του μετασχηματισμού M από τις ακόλουθες

   (α′) για να απεικονίσουμε τα z_1, z_2, z_3 στα 0, 1, ∞, $M(z) = K\frac{z-z_1}{z-z_3}$,

   (β′) για να απεικονίσουμε τα ∞, z_2, z_3 στα 0, 1, ∞, $M(z) = \frac{K}{z-z_3}$,

   (γ′) για να απεικονίσουμε τα z_1, ∞, z_3 στα 0, 1, ∞, $M(z) = \frac{z-z_1}{z-z_3}$,

   (δ′) για να απεικονίσουμε τα z_1, z_2, ∞ στα 0, 1, ∞, $M(z) = K(z - z_1)$,

β′. βρίσκουμε το μιγαδικό αριθμό K για τον οποίο $M(z_2) = 1$.

3. Μέθοδος: Για να βρούμε το μετασχηματισμό Möbius M που απεικονίζει τρία σημεία z_1, z_2 και z_3 στα σημεία w_1, w_2 και w_3, αντίστοιχα:

α′. βρίσκουμε το μετασχηματισμό Möbius M_1 που απεικονίζει τα z_1, z_2, z_3 στα σημεία 0, 1, ∞, αντίστοιχα,

β′. βρίσκουμε το μετασχηματισμό Möbius M_2 που απεικονίζει τα w_1, w_2, w_3 στα σημεία 0, 1, ∞, αντίστοιχα,

γ′. υπολογίζουμε το $M = M_2^{-1} \circ M_1$.

4. Μέθοδος: Για να προσδιορίσουμε εάν τα σημεία z_1, z_2, z_3 και z_4 βρίσκονται σε έναν κύκλο:

α′. βρίσκουμε το μετασχηματισμό Möbius M που απεικονίζει τα z_1, z_2, z_3 στα σημεία 0, 1, ∞, αντίστοιχα,

β′. τα σημεία z_1, z_2, z_3, z_4 βρίσκονται σε έναν γενικευμένο κύκλο εάν και μόνον εάν $M(z_4)$ είναι πραγματικός αριθμός, γ΄. αυτός ο γενικευμένος κύκλος είναι κύκλος εάν $M(\infty)$ δεν είναι πραγματικός αριθμός. Εάν $M(z_4)$ και $M(\infty)$ είναι και οι δύο πραγματικοί, τότε τα σημεία z_1, z_2, z_3 και z_4 βρίσκονται σε μία ευθεία.

5. Θεωρούμε γενικευμένους κύκλους C_1 και C_2 στο επεκτεταμένο επίπεδο. Τότε υπάρχει μετασχηματισμός Möbiusπου απεικονίζει τον C_1 στον C_2.
Όλοι οι γενικευμένοι κύκλοι είναι ισοδύναμοι στην αντιστροφική γεωμετρία.

Απολλώνιοι κύκλοι

1. Θεώρημα Απολλωνίων κύκλων. Θεωρούμε δύο διαφορετικά σημεία A και B στο επίπεδο και ένα θετικό πραγματικό αριθμό k διαφορετικό από το 1. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων P που ικανοποιούν τη σχέση $PA : PB = k : 1$ είναι ένας κύκλος του οποίου το κέντρο βρίσκεται στην ευθεία από τα A και B.
Το κέντρο του κύκλου είναι διαφορετικό από τα A και B. Εάν $A = (-a, 0)$ και $B = (a, 0)$, ο κύκλος έχει κέντρο c και ακτίνα r, όπου $c = \left(-a\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right), 0\right)$ και $r = \frac{2ak}{|1-k^2|}$.
Εάν $k = 1$, τότε το P βρίσκεται στη μεσοκάθετο του AB.
Για κάθε θετική τιμή του k ο γεωμετρικός τόπος είναι ένας γενικευμένος κύκλος που ονομάζεται Απολλώνιος κύκλος. Η οικογένεια όλων αυτών των κύκλων είναι η οικογένεια Απολλωνίων κύκλων που ορίζεται από τα σημεία A καιB.
Εάν $0 < k < 1$, ο Απολλώνιος κύκλος περιβάλει το A, εάν $k > 1$, ο Απολλώνιος κύκλος περιβάλει το B. Τα σημεία A και B ονομάζονται σημειακοί κύκλοι, που αντιστοιχούν στις τιμές $k = 0$ και $k = \infty$, αντίστοιχα. Κάθε σημείο του επιπέδου βρίσκεται σε έναν ακριβώς κύκλο (ή γενικευμένο κύκλο) κάθε οικογένειας Απολλωνίων κύκλων.

2. Θεωρούμε δύο διαφορετικά σημεία A και B στο επίπεδο και την αντιστροφή στον κύκλο με κέντρο A και ακτίνα 1. Η οικογένεια Απολλωνίων κύκλων που ορίζεται από τα σημεία A και B απεικονίζεται από την t στην οικογένεια όλων των ομόκεντρων κύκλων με κέντρο $t(B)$. Η οικογένεια των ομόκεντρων κύκλων με κέντρο $t(B)$ απεικονίζεται από την t στην οικογένεια Απολλωνίων κύκλων που ορίζεται από τα σημεία A και B.

3. Θεωρούμε δύο μη τεμνόμενους κύκλους C_1 και C_2. Τότε υπάρχει αντιστροφικός μετασχηματισμός που απεικονίζει τους C_1 και C_2 σε δύο ομόκεντρους κύκλους.

4. Θεώρημα δύο Απολλωνίων κύκλων: Θεωρούμε δύο μη τεμνόμενους κύκλους C_1 και C_2 που δεν είναι ομόκεντροι. Τότε υπάρχει μοναδική οικογένεια Απολλωνίων κύκλων στην οποία ανήκουν οι C_1 και C_2.