Σύνοψη Κεφαλαίου 6: Υπερβολική Γεωμετρία

Υπερβολική γεωμετρία: το μοντέλο του δίσκου

1. Στο μοντέλο του Poincaré της υπερβολικής γεωμετρίας, υπερβολικά σημεία είναι τα σημεία του μοναδιαίου δίσκου, $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$.
Τα σημεία στο σύνορο $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ του $\mathcal{D}$ δεν είναι σημεία του υπερβολικού επιπέδου.

2. Μία υπερβολική ευθεία είναι το τμήμα που περιέχεται στο $\mathcal{D}$ ενός (Ευκλείδειου) γενικευμένου κύκλου που τέμνει τον κύκλο $\S^1$ ορθογώνια. Μία υπερβολική ευθεία μπορεί να είναι τόξο ενός Ευκλείδειου κύκλου ή τμήμα μίας Ευκλείδειας ευθείας που είναι διάμετρος του $\mathcal{D}$. Τα σημεία που ο γενικευμένος κύκλος τέμνει τον S^1 ονομάζονται συνοριακά σημεία της υπερβολικής ευθείας.
Οι υπερβολικές ευθείες που είναι τόξα Ευκλείδειων κύκλων περιέχονται σε ένα μισό του $\mathcal{D}$ και καμπυλώνονται απομακρυνόμενες απο τη διάμετρο που ορίζει το αντίστοιχο μισό του δίσκου.
Η εξίσωση μίας υπερβολικής ευθείας ℓ είναι της μορφής $ax + by = 0$, όπου τα a και b δεν είναι και τα δύο 0, ή $x^2 + y^2 + fx + gy + 1 = 0$, όπου $f^2 + g^2 > 4$.

3. Δύο υπερβολικές ευθείες που δεν τέμνονται στο $\mathcal{D}$ ονομάζονται παράλληλες εάν οι γενικευμένοι κύκλοι που είναι φορείς τους έχουν κοινό σημείο στον S^1, και ονομάζονται υπερπαράλληλες εάν οι φορείς τους δεν τέμνονται στο S^1.
Για κάθε υπερβολική ευθεία ℓ και κάθε υπερβολικό σημείο P που δεν βρίσκεται στην ℓ, υπάρχουν ακριβώς δύο υπερβολικές ευθείες από το P που είναι παράλληλες στην ℓ, και άπειρες υπερβολικές ευθείες από το P που είναι υπερπαράλληλες στην ℓ.

4. Εάν ℓ είναι μία υπερβολική ευθεία με φορέα τον Ευκλείδειο κύκλο C, η αντιστροφή στον C απεικονίζει το S^1 στο S^1 και το $\mathcal{D}$ στο $\mathcal{D}$.

5. Μία υπερβολική ανάκλαση στην υπερβολική ευθεία ℓ είναι ο περιορισμός στο $\mathcal{D}$ της αντιστροφής στο γενικευμένο κύκλο C που είναι φορέας της ℓ.
Το κέντρο του κύκλου C είναι το σημείο τομής των εφαπτομένων του S^1 στα σημεία που τέμνονται ο S^1 και ο C.

6. Οι υπερβολικοί μετασχηματισμοί είναι πεπερασμένες συνθέσεις υπερβολικών ανακλάσεων. Με την πράξη της σύνθεσης απεικονίσεων αποτελούν μία ομάδα που ονομάζεται υπερβολική ομάδα και συμβολίζεται $G_{\mathcal{D}}$.
Η υπερβολική γεωμετρία αποτελείται από το σύνολο $\mathcal{D}$ και την ομαδα υπερβολικών μετασχηματισμών $G_{\mathcal{D}}$.

7. Η υπερβολική γωνία μεταξύ δύο καμπυλών που περνούν από ένα σημείο A του $\mathcal{D}$ είναι η Ευκλείδεια γωνία μεταξύ των (Ευκλείδειων) εφαπτομένων στο A.

8. Υπερβολικοί μετασχηματισμοί απεικονίζουν υπερβολικές ευθείες σε υπερβολικές ευ-

θείες, και διατηρούν το μέγεθος των γωνιών.

9. Λήμμα αρχής. Θεωρούμε ένα υπερβολικό σημείο A στον $\mathcal{D}$, διαφορετικό από την αρχή O. Τότε υπάρχει υπερβολική ευθεία ℓ τέτοια ώστε η υπερβολική ανάκλαση στην ℓ απεικονίζει το A στο O.

10. Θεωρούμε ένα υπερβολικό σημείο A στον $\mathcal{D}$. Υπάρχουν άπειρες υπερβολικές ευθείες από το A.
Θεωρούμε δύο διαφορετικά υπερβολικά σημεία A και B στον $\mathcal{D}$. Υπάρχει μοναδική υπερβολική ευθεία ℓ που περνάει από τα υπερβολικά σημεία A και B.

11. Θεωρούμε δύο διαφορετικά υπερβολικά σημεία A_1 και A_2 στον $\mathcal{D}$ και υπερβολικές ευθείες ℓ_1 και ℓ_2 από τα A_1 και A_2, αντίστοιχα. Υπάρχει υπερβολικός μετασχηματισμός που απεικονίζει το A_1 στο A_2 και την ℓ_1 στην ℓ_2.

12. Θεωρούμε δύο σημεία A και B αντίστροφα ως προς την αντιστροφή στην υπερβολική ευθεία ℓ, και A', B', ℓ' τις εικόνες των A, B, ℓ από την υπερβολική ανάκλαση σε μία άλλη ευθεία ℓ^*. Τότε A' και B' είναι αντίστροφα σημεία ως προς την αντιστροφή στην υπερβολική ευθεία ℓ'.

Υπερβολικοί μετασχηματισμοί

1. Η υπερβολική ανάκλαση ρ στην υπερβολική ευθεία ℓ που έχει φορέα τον Ευκλείδειο κύκλο C με κέντρο α δίδεται από τον τύπο

$$\rho(z) = \frac{\alpha\bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{\alpha}}, \quad z \in \mathcal{D}\,.$$

Η υπερβολική ανάκλαση είναι αντίστροφη του εαυτού της.
Η υπερβολική ανάκλαση σ στη διάμετρο του $\mathcal{D}$ στην οποία $y = x\tan\vartheta$ δίδεται από τον τύπο $\sigma(z) = \alpha^2\bar{z}$ για $z \in \mathcal{D}$, όπου $\alpha = \cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta$.

2. Η σύνθεση των υπερβολικών ανακλάσεων $\rho(z) = \frac{\alpha\bar{z}-1}{\bar{z}-\bar{\alpha}}$ και $\sigma(z) = \frac{\beta\bar{z}-1}{\bar{z}-\bar{\beta}}$ είναι

$$(\sigma \circ \rho)(z) = \frac{(\bar{\alpha}\beta - 1)\bar{z} + \alpha - \beta}{(\bar{\alpha} - \bar{\beta})\bar{z} - 1}\,.$$

3. Ο περιορισμός στο $\mathcal{D}$ κάθε μετασχηματισμού Möbius της μορφής $M(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$, με $|b| < |a|$, είναι σύνθεση δύο υπερβολικών ανακλάσεων, και συνεπώς είναι υπερβολικός μετασχηματισμός.

4. Κάθε υπερβολικός μετασχηματισμός μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση το πολύ τριών υπερβολικών ανακλάσεων.

5. Η σύνθεση άρτιου αριθμού υπερβολικών ανακλάσεων διατηρεί αμετάβλητο τον προσανατολισμό στο $\mathcal{D}$. Ένας υπερβολικός μετασχηματισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση δύο υπερβολικών ανακλάσεων.
Κάθε υπερβολικός μετασχηματισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό είναι της μορφής $z \longmapsto M(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$ για $z \in \mathcal{D}$, με $|b| < |a|$.
Η σύνθεση περιττού αριθμού υπερβολικών ανακλάσεων αντιστρέφει τον προσανατολισμό στο $\mathcal{D}$.
Κάθε υπερβολικός μετασχηματισμός που αντιστρέφει τον προσανατολισμό είναι της μορφής $z \longmapsto M(\bar{z})$, όπου $M(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$ για $z \in \mathcal{D}$, με $|b| < |a|$.

6. Η σύνθεση υπερβολικών ανακλάσεων σε υπερβολικές ευθείες ℓ_1 και ℓ_2 που τέμνονται σε ένα σημείο στο $\mathcal{D}$ ονομάζεται υπερβολική περιστροφή και έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο

στο $\mathcal{D}$.
Η σύνθεση υπερβολικών ανακλάσεων σε υπερβολικές ευθείες ℓ_1 και ℓ_2 που δεν τέμνονται στο $\mathcal{D}$ αλλά τέμνονται σε ένα σημείο στο S^1 ονομάζεται υπερβολική οριακή περιστροφή και δεν έχει σταθερό σημείο στο $\mathcal{D}$, αλλά έχει ένα σταθερό σημείο στο S^1. Η σύνθεση υπερβολικών ανακλάσεων σε υπερβολικές ευθείες ℓ_1 και ℓ_2 που δεν τέμνονται ούτε στο $\mathcal{D}$ ούτε στο S^1 ονομάζεται υπερβολική μετατόπιση και δεν έχει σταθερό σημείο στο $\mathcal{D}$, αλλά έχει δύο σταθερά σημεία στο S^1.

7. Ένας υπερβολικός μετασχηματισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό γράφεται στην κανονική μορφή $M(z) = K\frac{z-m}{1-\bar{m}z}$, όπου K και m είναι μιγαδικοί αριθμοί, με $|K| = 1$ και $m \in \mathcal{D}$.
Αντίστροφα, κάθε υπερβολικός μετασχηματισμός M που απεικονίζει το σημείο m στο O έχει αυτή τη μορφή.
Ένας υπερβολικός μετασχηματισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό καιαπεικονίζει τη διάμετρο $(-1,\, 1)$ στον εαυτό της γράφεται στη μορφή $M(z) = \pm\frac{z-m}{1-mz}$, όπου $m \in (-1,\, 1)$.
Ένας υπερβολικός μετασχηματισμός που αντιστρέφει τον προσανατολισμό γράφεται στην κανονική μορφή $M(z) = K\frac{\bar{z}-m}{1-\bar{m}\bar{z}}$, όπου $|K| = 1$ και $m \in \mathcal{D}$.

8. Μέθοδος: Για να προσδιορίσουμε την γενική μορφή ενός υπερβολικού μετασχηματισμού που απεικονίζει ένα σημείο $p \in \mathcal{D}$ σε ένα άλλο σημείο $q \in D$:

α′. γράφουμε τη γενική μορφή του υπερβολικού μετασχηματισμού M_1 που διατηρεί τον προσανατολισμό και απεικονίζει το p στο O, και έναν πίνακα A_1 που αντιστοιχεί στον M_1,

β′. γράφουμε έναν υπερβολικό μετασχηματισμό M_2 που διατηρεί τον προσανατολισμό και απεικονίζει το q στο O, και έναν πίνακα A_2 που αντιστοιχεί στον M_2,

γ′. υπολογίζουμε το γινόμενο $A_2^{-1}A_1$ που αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό $M_2^{-1} \circ M_1$ που αποτελεί τη γενική μορφή του ζητούμενου μετασχηματισμού.

Απόσταση στην υπερβολική γεωμετρία

1. Ιδιότητες μίας συνάρτησης απόστασης d.

α′. $d(z_1,\, z_2) \geq 0$ για κάθε $z_1,\, z_2$,
$d(z_1,\, z_2) = 0$ εάν και μόνον εάν $z_1 = z_2$.

β′. $d(z_1,\, z_2) = d(z_2,\, z_1)$ για κάθε $z_1,\, z_2$.

γ′. $d(z_1,\, z_3) + d(z_3,\, z_2) \geq d(z_1,\, z_2)$ για κάθε $z_1,\, z_2,\, z_3$. (Τριγωνική ανισότητα)

δ′. $d(z_1,\, z_3) + d(z_3,\, z_2) = d(z_1,\, z_2)$ εάν και μόνον εάν z_1, z_2και z_3 βρίσκονται σε αυτή τη διάταξη σε μία ευθεία.

Επιπλέον ιδιότητες της συνάρτησης απόστασης d στην υπερβολική γεωμετρία

ε′. $d(z_1,\, z_2) = d(\overline{z_1},\, \overline{z_2})$ για κάθε $z_1,\, z_2 \in \mathcal{D}$.

ϛ′. $d(z_1,\, z_2) = d(M(z_1),\, M(z_2))$ για κάθε $z_1,\, z_2 \in \mathcal{D}$ και κάθε υπερβολικό μετασχηματισμό $M \in G_{\mathcal{D}}$.

2. Η υπερβολική απόσταση $d(0,\, z)$ από την αρχή σε κάθε σημείο $z \in \mathcal{D}$ δίδεται από

$$d(0,\, z) = \operatorname{arctanh}\left(|z|\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right).$$

Η υπερβολική απόσταση μεταξύ δύο σημείων z_1 και $z_2 \in \mathcal{D}$ δίδεται από

$$d(z_1,\, z_2) = \operatorname{arctanh}\left(\left|\frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1} z_2}\right|\right).$$

3. Για μικρά $|z|$, $d(0,\, z) \simeq |z|$. Καθώς $|z| \to 1$, $d(0,\, z) \to \infty$. Για $z \neq 0$, $d(0,\, z) > |z|$.

4. Ένα σημείο $m \in \mathcal{D}$ είναι το υπερβολικό μέσο του υπερβολικού τμήματος που συνδέει τα a και b εάν m βρίσκεται σε αυτό το τμήμα και $d(a,\, m) = d(m,\, b) = \frac{1}{2} d(a,\, b)$.

5. Θεωρούμε σημεία A και A' στο δίσκο $\mathcal{D}$ τα οποία είναι εικόνες το ένα του άλλου από την ανάκλαση στην υπερβολική ευθεία ℓ. Τοτε ℓ είναι η υπερβολική μεσοκάθετος του υπερβολικού τμήματος AA'.

6. Λήμμα ανάκλασης. Θεωρούμε σημεία p και $q \in D$. Εάν $|p| \neq |q|$, τότε η υπερβολική ανάκλαση που απεικονίζει το ένα στο άλλο είναι

$$M(z) = \frac{\alpha \bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{\alpha}}, \quad \text{όπου } \alpha = \frac{p - q + pq(\bar{p} - \bar{q})}{p\bar{p} - q\bar{q}}.$$

Η υπερβολική ευθεία στην οποία γίνεται αυτή η ανάκλαση έχει εξίσωση

$$xr + y^2 - 2ax - 2by + 1 = 0, \quad \text{όπου } \alpha = a + \mathrm{i}b.$$

Εάν $|p| = |q|$, τότε η ανάκλαση που απεικονίζει το ένα στο άλλο είναι η ανάκλαση στη διάμετρο του $\mathcal{D}$ που διχοτομεί τη γωνία $\angle pOq$.

Γεωμετρικά θεωρήματα

1. Ένα υπερβολικό τρίγωνο αποτελείται από 3 σημεία στο $\mathcal{D}$ που δεν βρίσκονται στην ίδια υπερβολική ευθεία, μαζί με τα τμήματα των τριών υπερβολικών ευθειών που τα συνδέουν.

2. Το άθροισμα των γωνιών ενός υπερβολικού τριγώνου είναι μικρότερο από π.
Κάθε εξωτερική γωνία ενός υπερβολικού τριγώνου είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών.
Μικρά τρίγωνα έχουν άθροισμα γωνιών κοντά στο π (αλλά μικρότερο από αυτό), και τρίγωνα των οποίων όλες οι πλευρές έχουν μεγάλο μήκος, έχουν άθροισμα γωνιών κοντά στο 0.

3. Ένα υπερβολικό τετράπλευρο $ABCD$ αποτελείται από 4 σημεία στο $\mathcal{D}$, κάθε τρία από τα οποία δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, μαζί με τα διαστήματα AB, BC, CD και DA στις υπερβολικές ευθείες που τα συνδέουν. Απαιτούμε επίσης να μην τέμνονται αυτά τα τμήματα παρά μόνον στα σημεία A, B, C, D.
Το άθροισμα των γωνιών ενός υπερβολικού τετραπλεύρου είναι μικρότερο από 2π.

4. Σε ένα υπερβολικό τρίγωνο ABC οι γωνίες $\angle ABC$ και $\angle ACB$ είναι ίσες εάν και μόνον εάν οι πλευρές AB και AC έχουν ίσο υπερβολικό μήκος.

5. Δύο σχήματα στο υπερβολικό επίπεδο $\mathcal{D}$ είναι ίσα στην υπερβολική γεωμετρία εάν υπάρχει υπερβολικός μετασχηματισμός που απεικονίζει το ένα στο άλλο.
Όμοια υπερβολικά τρίγωνα (δηλαδή τρίγωνα με ίσες τις αντίστοιχες γωνίες) είναι ίσα στην υπερβολική γεωμετρία.

6. Ένα ασυμπτωτικό τρίγωνο είναι ένα υπερβολικό τρίγωνο του οποίου μία ή περισσότερες κορυφές βρίσκονται στο S^1 (και όχι στο $\mathcal{D}$). Ένα τρίγωνο είναι απλά, διπλά ή τριπλά ασυμπτωτικό, αντίστοιχα εάν έχει μία, δύο ή τρείς κορυφές στο S^1.
Το άθροισμα των γωνιών ενός ασυμπτωτικού τριγώνου είναι μικρότερο από π. Το άθροισμα των γωνιών ενός τριπλά ασυμπτωτικού τριγώνου είναι 0.

7. Θεωρούμε δύο υπερβολικές ευθείες ℓ_1 και ℓ_2, και υποθέτουμε οτι υπάρχουν σημεία A_1 στην ℓ^1 και A^2 στην ℓ_2, τέτοια ώστε το υπερβολικό τμήμα A_1A_2 τέμνει τις ℓ_1 και ℓ_2 ορθογώνια. Τότε λέμε οτι A_1A_2 είναι η κοινή κάθετος των ευθειών ℓ_1 και ℓ_2.
Θεώρημα κοινής καθέτου. Δύο υπερβολικές ευθείες έχουν κοινή κάθετο εάν και μόνον εάν αυτές είναι υπερπαράλληλες. Η κοινή κάθετος είναι μοναδική.

8. Από ένα σημείο P που δεν βρίσκεται στην υπερβολική ευθεία ℓ, υπάρχει μοναδική υπερβολική ευθεία που συναντά την ℓ σε ορθή γωνία.
Θεωρούμε μία υπερβολική ευθεία ℓ που περνάει από μία κορυφή A του υπερβολικού τριγώνου ABC και είναι κάθετος στην απέναντι πλευρά BC στο σημείο D. Λέμε οτι το υπερβολικό τμήμα AD είναι ένα ύψος του τριγώνου ABC.
Θεώρημα ύψους. Θεωρούμε ένα υπερβολικό τρίγωνο ABC του οποίου οι πλευρές AB και AC έχουν ίσο υπερβολικό μήκος. Έστω ϑ η γωνία στην κορυφή A. Τότε το υπερβολικό μήκος του ύψους του τριγωνου από το A είναι άνω φραγμένο από έναν αριθμό που εξαρτάται μόνον από το ϑ.

9. Υπερβολικό Πυθαγόρειο Θεώρημα. Θεωρούμε ένα υπερβολικό τρίγωνο ABC στο οποίο η γωνία στην κορυφή C είναι ορθή. Εάν a, b και c είναι τα υπερβολικά μήκη των πλευρών BC, CA και AB αντίστοιχα, τότε

$$\cosh 2c = \cosh 2a \times \cosh 2b\,.$$

10. Γωνία παραλληλισμού. Θεωρούμε μία υπερβολική ευθεία ℓ και ένα σημείο P του $\mathcal{D}$ που δεν βρίσκεται πάνω στην ℓ. Έστω φ η γωνία μεταξύ της καθέτου από το P προς την ευθεία ℓ, και μίας από τις ευθείες από το P που είναι παράλληλες προς την ℓ. Τότε

$$\tan\varphi = \frac{1}{\sinh 2p}\,.$$