ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2015-16
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ101 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Τμήμα Β

Φυλλάδιο Προβλημάτων 1

Τρίτη 6/10/2015

Συμβολισμοί

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών.
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
$\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών.
$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n},\ \text{όπου } m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\}$ το σύνολο των ρητών αριθμών.
$\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Ορισμοί

Μία **ακολουθία** είναι μία συνάρτηση στο σύνολο των φυσικών αριθμών με τιμές πραγματικούς αριθμούς, $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Η τιμή της ακολουθίας a στον αριθμό n ονομάζεται n-οστός όρος της ακολουθίας και συνήθως συμβολίζεται a_n αντί για $a(n)$.

Μία ακολουθία ονομάζεται **φραγμένη** εάν υπάρχει πραγματικός αριθμός M τέτοιος ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $|a_n| \leq M$.

Η άρνηση: Μία ακολουθία **δεν είναι φραγμένη** εάν για κάθε πραγματικό αριθμό $M \in \mathbb{R}$, υπάρχει φυσικός αριθμός $k \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|a_k| > M$.

Άσκηση 1.1 Δείξτε οτι η ακολουθία $a_n = \frac{-3}{n}$ είναι φραγμένη.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Αναζητούμε έναν αριθμό M τέτοιο ώστε $|\frac{-3}{n}| \leq M$ γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$. $|\frac{-3}{n}| = \frac{3}{n} \leq 3$ αφού $n \geq 1$. Άρα $M = 3$ είναι ένα φράγμα.

Άσκηση 1.2 Δείξτε οτι η ακολουθία $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$ είναι φραγμένη.

Άσκηση 1.3 Δείξτε οτι μία αριθμητική ακολουθία $a_n = a + nt$ δεν είναι φραγμένη εάν $t \neq 0$.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Πρέπει να δείξουμε οτι εάν $t \neq 0$, κανένας αριθμός $M \in \mathbb{R}$ δεν είναι φράγμα της ακολουθίας $a_n = a + nt$. Δηλαδή οτι για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει κάποιος $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|a + nt| > M$.

Εάν $M < 0$ αυτό ισχύει για κάθε n.
Υποθέτουμε οτι $M \geq 0$. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε $|a + nt| \geq |n|t| - |a||$. Εάν $n > \frac{|a|}{|t|}$, τότε $|n|t| - |a|| = n|t| - |a|$, και $n|t| - |a| > M$ εάν $n > \frac{M+|a|}{|t|}$.
Επιλέγουμε $k > \frac{M+|a|}{|t|}$. Τότε

$$|a + kt| \geq |k|t| - |a|| > k|t| - |a| > M\,.$$

Άρα όταν $t \neq 0$ η ακολουθία $a_n = a + nt$ δεν είναι φραγμένη.

Άσκηση 1.4 Δείξτε χρησιμοποιώντας επαγωγή οτι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n$.
Δείξτε οτι η ακολουθία $a_n = 2^n$ δεν είναι φραγμένη.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Η διαδικασία της επαγωγής. Για να αποδειξουμε οτι η πρόταση $P(n)$, που εξαρτάται από τον φυσικό αριθμό αριθμό n, ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$:

- Δείχνουμε οτι ισχύει η $P(1)$.
- Δείχνουμε οτι εάν υποθέσουμε οτι ισχύει η $P(k)$ για κάποιο φυσικό αριθμό $k \geq 1$, τότε μπορούμε να αποδείξουμε οτι ισχύει η $P(k+1)$.
- Επικαλούμαστε το αξίωμα της επαγωγής για να συμπεράνουμε οτι η $P(n)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για να αποδείξουμε οτι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n$:

- Η $P(1)$ ισχύει: $2^1 \geq 1$.
- Υποθέτουμε οτι για το φυσικό αριθμό $k \geq 1$, $2^k \geq k$. Τότε $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2 \cdot k$. Αλλά αφού $k \geq 1$, $2k \geq k + 1$. Άρα $2^{k+1} \geq k + 1$.
- Από το αξίωμα της επαγωγής, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $2^n \geq n$.

Για να δείξουμε οτι 2^n δεν είναι φραγμένη: Έστω $M \in \mathbb{R}$. Επιλέγουμε φυσικό αριθμό $k > |M|$. Τότε $2^k \geq k > |M| \geq M$. Άρα η $a_n = 2^n$ δεν είναι φραγμένη.

Άσκηση 1.5 Δείξτε χρησιμοποιώντας επαγωγή οτι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n! \geq n$.
Δείξτε οτι η ακολουθία $a_n = n!$ δεν είναι φραγμένη.

Απάντηση - Υπόδειξη.
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Άσκηση 1.6 Είναι η ακολουθία $a_n = \sqrt[n]{2}$ φραγμένη;

Άσκηση 1.7 Βρείτε μία ακολουθία a_n τέτοια ώστε a_n δεν είναι φραγμένη και $b_n = \frac{1}{a_n}$ δεν είναι φραγμένη.

Απάντηση - Υπόδειξη.
Αναζητούμε μία ακολουθία που να έχει κάποιους όρους που να αυξάνονται χωρίς φράγμα και κάποιους άλλους όρους που να πλησιάζουν αυθαίρετα κοντά στο 0. Ορίζουμε την ακολουθία

$$a_n = \begin{cases} n & \text{όταν } n \text{ είναι άρτιος,} \\ \frac{1}{n} & \text{όταν } n \text{ είναι περιττός.} \end{cases}$$

(Παρατηρήστε οτι την ίδια ακολουθία μπορούμε να ορίσουμε με $a_n = n^{(-1)^n}$.)
Δείξτε οτι η a_n δεν είναι φραγμένη, αλλά και η $b_n = \frac{1}{a_n}$ δεν είναι φραγμένη.

Ορισμοί

Μία ακολουθία a_n είναι **αύξουσα** εάν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_{n+1} \geq a_n$.
Μία ακολουθία a_n είναι **φθίνουσα** εάν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_{n+1} \leq a_n$.

Άσκηση 1.8 Εξετάστε εάν είναι αύξουσα ή φθίνουσα η ακολουθία $a_n = b^n$

α'. όταν $b \geq 1$.

β'. όταν $0 < b < 1$.

γ'. όταν $b < 0$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

α'. Όταν $b \geq 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = b^{n+1} = b \cdot b^n \geq b^n = a_n$. Άρα η ακολουθία είναι αύξουσα.

β'. Όταν $0 < b < 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = b^{n+1} = b \cdot b^n < b^n = a_n$. Άρα η ακολουθία είναι (γνήσια) φθίνουσα.

γ'. όταν $b < 0$, $b^2 > 0 > b$, αλλά $b^3 < 0 < b^2$. Άρα η ακολουθία δεν είναι ούτε άυξουσα ούτε φθίνουσα.

Ορισμός

Μία ακολουθία ονομάζεται **μηδενική** εάν για κάθε θετικό αριθμό $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $k \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq k$ ισχύει $|a_n| < \varepsilon$.

Άσκηση 1.9 Με χρήση του ορισμού εξετάστε εάν είναι μηδενικές οι ακολουθίες

α'. $\frac{1}{n^2}$

β'. $\frac{1}{2^n}$

γ'. $\frac{(-1)^n}{n^2+n}$

δ'. $\frac{1}{\sqrt{n}}$

ε'. $1 + (-1)^n$

Απάντηση - Υπόδειξη.

Σε κάθε περίπτωση πρέπει, για κάθε $\varepsilon > 0$, να βρούμε $k \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $|a_n| < \varepsilon$ όταν $n \geq k$.

α΄. $\frac{1}{n^2}$. Για κάθε $\varepsilon > 0$, ισχύει $\sqrt{\varepsilon} > 0$, και υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $k > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Τότε για $n \geq k$, $|a_n| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{k^2} < \varepsilon$. Άρα η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n^2}$ είναι μηδενική.

β΄. $\frac{1}{2^n}$.

γ΄. $\frac{(-1)^n}{n^2+n}$. Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $k > \frac{1}{\varepsilon}$. Τότε για $n \geq k$, $|a_n| = \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} < \varepsilon$. Άρα η ακολουθία $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2+n}$ είναι μηδενική.
Παρατηρήστε οτι θα μπορούσαμε να είχαμε επιλέξει το k να ικανοποιεί $k > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Τότε θα είχαμε, για $n \geq k$, $|a_n| = \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{k^2} < \varepsilon$. Γενικά, δεν μας ενδιαφέρει να βρούμε το 'καλύτερο δυνατό' k.

δ΄. $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

ε΄. $1 + (-1)^n$ δεν είναι μηδενική. Εάν $\varepsilon < 2$, δεν υπάρχει k με τη ζητούμενη ιδιότητα.

Άσκηση 1.10 Με χρήση των ιδιοτήτων μηδενικών ακολουθιών και των αποτελεσμάτων της προηγούμενης άσκησης εξετάστε εάν είναι μηδενικές οι ακολουθίες

α΄. $\frac{3n+2}{n^2}$

β΄. $\frac{n^2+3n}{2n^3-1}$

γ΄. $\frac{2^n-3}{2^{n+1}}$

δ΄. $\frac{2^n-1}{2^{2n}-1}$

ε΄. $\frac{\sqrt{n}}{n+1}$

ϛ΄. $\frac{1+\cos n}{n+3}$

Απάντηση - Υπόδειξη.

α΄. $0 < \frac{3n+2}{n^2} = \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} = 3 \cdot \frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{1}{n^2}$. Αφού οι ακολουθίες $\frac{1}{n}$ και $\frac{1}{n^2}$ είναι μηδενικές, το ίδιο ισχύει και για την $\frac{3n+2}{n^2}$.

β΄. $0 < \frac{n^2+3n}{2n^3-1} = \frac{n^2(1+\frac{3}{n})}{n^2(2n-\frac{1}{n^2})} = \frac{1+\frac{3}{n}}{2n-\frac{1}{n^2}} \leq \frac{4}{2n-1}$ (Για την ανισότητα, μεγαλώνουμε τον αριθμητή και μικραίνουμε τον παρονομαστή). Αλλά για $n \geq 2$, $\frac{4}{2n-1} < 4 \cdot \frac{1}{n}$. Αφού η ακολουθία $\frac{1}{n}$ είναι μηδενική, το ίδιο ισχύει για την $\frac{n^2+3n}{2n^3-1}$.

γ΄. $\frac{2^n-3}{2^{n+1}} = \frac{1-\frac{3}{2^n}}{2}$ δεν είναι μηδενική. Εάν $\varepsilon < \frac{1}{2}$, δεν υπάρχει k με τη ζητούμενη ιδιότητα.

δ΄. $0 < \frac{2^n-1}{2^{2n}-1} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{2^n-\frac{1}{2^n}} < \frac{1}{2^n-1}$. Αλλά $2^n - 1 \geq n$ (απόδειξη με επαγωγή) και συνεπώς η ακολουθία $\frac{2^n-1}{2^{2n}-1}$ είναι μηδενική.

ε΄. $0 < \frac{\sqrt{n}}{n+1} < \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

ϛ΄. $\left|\frac{1+\cos n}{n+3}\right| \leq \frac{2}{n+3}$.