

## MEM101 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ I Τμήμα Β

### Φυλλάδιο Προβλημάτων 1

Τρίτη 6/10/2015

#### Συμβολισμοί

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  το σύνολο των φυσικών αριθμών.

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

$\mathbb{Z}$  το σύνολο των ακεραίων αριθμών.

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}, \text{ όπου } m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$  το σύνολο των ρητών αριθμών.

$\mathbb{R}$  το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

#### Ορισμοί

Μία **ακολουθία** είναι μία συνάρτηση στο σύνολο των φυσικών αριθμών με τιμές πραγματικούς αριθμούς,  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Η τιμή της ακολουθίας  $a$  στον αριθμό  $n$  ονομάζεται  $n$ -οστός όρος της ακολουθίας και συνήθως συμβολίζεται  $a_n$  αντί για  $a(n)$ .

Μία ακολουθία ονομάζεται **φραγμένη** εάν υπάρχει πραγματικός αριθμός  $M$  τέτοιος ώστε για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  να ισχύει  $|a_n| \leq M$ .

*Η άρνηση:* Μία ακολουθία **δεν είναι φραγμένη** εάν για κάθε πραγματικό αριθμό  $M \in \mathbb{R}$ , υπάρχει φυσικός αριθμός  $k \in \mathbb{N}$  τέτοιος ώστε  $|a_k| > M$ .

**Άσκηση 1.1** Δείξτε ότι η ακολουθία  $a_n = \frac{-3}{n}$  είναι φραγμένη.

**Άσκηση 1.2** Δείξτε ότι η ακολουθία  $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$  είναι φραγμένη.

**Άσκηση 1.3** Δείξτε ότι μία αριθμητική ακολουθία  $a_n = a + nt$  δεν είναι φραγμένη εάν  $t \neq 0$ .

**Άσκηση 1.4** Δείξτε χρησιμοποιώντας επαγωγή ότι για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ ,  $2^n \geq n$ .  
Δείξτε ότι η ακολουθία  $a_n = 2^n$  δεν είναι φραγμένη.

**Άσκηση 1.5** Δείξτε χρησιμοποιώντας επαγωγή ότι για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n! \geq n$ .  
Δείξτε ότι η ακολουθία  $a_n = n!$  δεν είναι φραγμένη.

**Άσκηση 1.6** Είναι η ακολουθία  $a_n = \sqrt[n]{2}$  φραγμένη;

**Άσκηση 1.7** Βρείτε μία ακολουθία  $a_n$  τέτοια ώστε  $a_n$  δεν είναι φραγμένη και  $b_n = \frac{1}{a_n}$  δεν είναι φραγμένη.

### Ορισμοί

Μία ακολουθία  $a_n$  είναι **αύξουσα** εάν για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει  $a_{n+1} \geq a_n$ .

Μία ακολουθία  $a_n$  είναι **φθίνουσα** εάν για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει  $a_{n+1} \leq a_n$ .

**Άσκηση 1.8** Εξετάστε εάν είναι αύξουσα ή φθίνουσα η ακολουθία  $a_n = b^n$

α'. όταν  $b \geq 1$ .

β'. όταν  $0 < b < 1$ .

γ'. όταν  $b < 0$ .

### Ορισμός

Μία ακολουθία ονομάζεται **μηδενική** εάν για κάθε θετικό αριθμό  $\varepsilon > 0$  υπάρχει φυσικός αριθμός  $k \in \mathbb{N}$  τέτοιος ώστε για κάθε  $n \geq k$  ισχύει  $|a_n| < \varepsilon$ .

**Άσκηση 1.9** Με χρήση του ορισμού εξετάστε εάν είναι μηδενικές οι ακολουθίες

α'.  $\frac{1}{n^2}$

β'.  $\frac{1}{2^n}$

γ'.  $\frac{(-1)^n}{n^2+n}$

δ'.  $\frac{1}{\sqrt{n}}$

ε'.  $1 + (-1)^n$

**Άσκηση 1.10** Με χρήση των ιδιοτήτων μηδενικών ακολουθιών και των αποτελεσμάτων της προηγούμενης άσκησης εξετάστε εάν είναι μηδενικές οι ακολουθίες

α'.  $\frac{3n+2}{n^2}$

β'.  $\frac{n^2+3n}{2n^3-1}$

γ'.  $\frac{2^n-3}{2^{n+1}}$

δ'.  $\frac{2^n-1}{2^{2n}-1}$

ε'.  $\frac{\sqrt{n}}{n+1}$

ς'.  $\frac{1+\cos n}{n+3}$