

MEM101 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
Τμήμα Β

Φυλλάδιο Προβλημάτων 10

Τρίτη 8/12/2015

Πίνακας στοιχειωδών ολοκληρωμάτων

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$e^{ax}, a \neq 0$	$\frac{1}{a}e^{ax} + c$
$x^{-1}, x \neq 0$	$\log x + c$	$a^x, a > 0$	$\frac{1}{\log a}a^x + c$
$\sin ax$	$-\frac{1}{a}\cos ax + c$	$\cos ax$	$\frac{1}{a}\sin ax + c$
$\tan x$ για $k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}$	$-\log \cos x + c$	$\cot x$ για $k\pi < x < (k+1)\pi$	$\log \sin x + c$
$\sec^2 x$ για $k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}$	$\tan x$	$\operatorname{cosec}^2 x$ για $k\pi < x < (k+1)\pi$	$-\cot x$
$\frac{1}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a}\arctan \frac{x}{a}$	$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, x < a$	$\arcsin \frac{x}{a}$
$\log x$	$x \log x - x$	$\sec x$	$\log \sec x + \tan x $

Πρόταση 1 (Ολοκλήρωση με αντικατάσταση) Εάν η $f(y)$ είναι συνεχής στο διάστημα J , η $g(x)$ έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα I και $g(I) \subseteq J$, τότε εάν θέσουμε $y = g(x)$ ισχύει

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy.$$

Άσκηση 10.1 Χρησιμοποιήστε αντικατάσταση για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

α'. $\int x\sqrt{2x^2 - 1} dx$

β'. $\int x(x^2 + 1)^{\frac{2}{3}} dx$

$$\gamma'. \int \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$\delta'. \int (x+1)\sqrt{x^2+2x} dx$$

$$\epsilon'. \int \cos^2 5x \sin 5x dx$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$\alpha'. \int x\sqrt{2x^2-1} dx = \frac{1}{6}(2x^2-1)^{\frac{3}{2}} + c.$$

$$\beta'. \int x(x^2+1)^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{10}(x^2+1)^{\frac{5}{3}} + c.$$

$$\gamma'. \int \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} dx = 4\sqrt{x^2+1} + c.$$

$$\delta'. \int (x+1)\sqrt{x^2+2x} dx = \frac{1}{3}(x^2+2x)^{\frac{3}{2}} + c.$$

$$\epsilon'. \int \cos^2 5x \sin 5x dx = -\frac{1}{15} \cos^3 5x + c.$$

Άσκηση 10.2 Υπολογίστε τα ορισμένα ολοκληρώματα

$$\alpha'. \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{2x+3} dx.$$

$$\beta'. \int_{-\pi}^0 \frac{\sin x}{3+\cos x} dx.$$

$$\gamma'. \int_0^{\pi} e^{\cos x} \sin x dx.$$

$$\delta'. \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx.$$

$$\epsilon'. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x dx.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$\alpha'. \int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{2x+3} dx = \frac{1}{3}(7^{\frac{3}{2}} - 8).$$

$$\beta'. \int_{-\pi}^0 \frac{\sin x}{3 + \cos x} dx = -\log 2.$$

$$\gamma'. \int_0^{\pi} e^{\cos x} \sin x dx = e - e^{-1}.$$

$$\delta'. \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx = \frac{4}{15}.$$

$$\epsilon'. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x dx = \frac{4}{3}.$$

Άσκηση 10.3 Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y = -3x^2 + 12$ και τον x -άξονα.

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$\int_{-2}^2 = 3(x^2 - 4)dx = 32.$$

Άσκηση 10.4 Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y = 4 - (x - 1)^2$, τον y -άξονα και το θετικό x -ημιάξονα.

Απάντηση - Υπόδειξη.

9.

Άσκηση 10.5 Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τα γραφήματα των $f(x) = x^2 - 4x$ και $g(x) = x$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

Τα γραφήματα των f και g τέμνονται στα σημεία $(0, 0)$ και $(5, 5)$.

$$\int_0^5 (x - (x^2 - 4x))dx = \frac{125}{6}.$$

Πρόταση 2 (Ολοκλήρωση κατά παράγοντες) Εάν η $f(x)$ και η $g(x)$ έχουν συνεχή παράγωγο στο διάστημα I , τότε ισχύει

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx.$$

Άσκηση 10.6

α'. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \sin^2 x dx$ με δύο τρόπους

(i) ολοκλήρωση κατά παράγοντες,

(ii) χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $2 \sin^2 \vartheta = 1 - \cos 2\vartheta$.

β'. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \sin^4 x dx$.

γ'. Βρείτε τον αναδρομικό τύπο που συνδέει το ολοκλήρωμα $\int \sin^n x \, dx$ και το ολοκλήρωμα $\int \sin^{n-2} x \, dx$.

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$\alpha'. \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c$$

$$\beta'. \int \sin^4 x \, dx = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}(x - \sin x \cos x).$$

$$\gamma'. \int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx.$$

Άσκηση 10.7 Χρησιμοποιήστε ολοκλήρωση κατά παράγοντες για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\alpha'. \int x^2 \log x \, dx, \quad \beta'. \int x \cos 3x \, dx, \quad \gamma'. \int x^2 \sin x \, dx.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$\alpha'. \int x^2 \log x \, dx = \frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{9}x^3 + c.$$

$$\beta'. \int x \cos 3x \, dx = \frac{1}{3}x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + c.$$

$$\gamma'. \int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c.$$

Άσκηση 10.8 Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των ρητών συναρτήσεων

$$\alpha'. \int \frac{1}{x^2 - 2x + 5} \, dx, \quad \beta'. \int \frac{x}{9x^2 - 6x + 5} \, dx, \quad \gamma'. \int \frac{5x - 7}{x^2 - 3x + 2} \, dx.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$\alpha'. \int \frac{1}{x^2 - 2x + 5} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y^2 + 1} \, dy = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x-1}{2} \right) + c, \text{ όπου } y = \frac{x-1}{2}.$$

$$\beta'. \int \frac{x}{9x^2 - 6x + 5} \, dx = \frac{1}{18} \int \frac{18x - 6}{9x^2 - 6x + 5} \, dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{9x^2 - 6x + 5} \, dx = \frac{1}{18} \log |9x^2 - 6x + 5| + \frac{1}{18} \arctan \left(\frac{3x-1}{2} \right) + c.$$

$$\gamma'. \int \frac{5x - 7}{x^2 - 3x + 2} dx = 2 \log |x - 1| + 3 \log |x - 2| + c.$$

Άσκηση 10.9 Υπολογίστε τις τιμές, εάν υπάρχουν, των γενικευμένων ολοκληρωμάτων

$$\alpha'. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx, \quad \beta'. \int_{0+}^1 \frac{1}{x^2} dx, \quad \gamma'. \int_0^{+\infty} e^{-x} dx.$$

Απάντηση - Υπόδειξη.

$$\alpha'. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1, \quad \beta'. \int_{0+}^1 \frac{1}{x^2} dx = +\infty, \quad \gamma'. \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$