ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Χειμερινό Εξάμηνο 2015-16
Διδάσκων: Χρήστος Κουρουνιώτης

ΜΕΜ101 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

Τμήμα Β

Φυλλάδιο Προβλημάτων 10

Τρίτη 8/12/2015

Πίνακας στοιχειωδών ολοκληρωμάτων

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$	$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$x^n\,,\ n \neq -1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$e^{ax}\,, a \neq 0$	$\frac{1}{a}e^{ax} + c$
$x^{-1}\,,\ x \neq 0$	$\log\lvert x\rvert + c$	$a^x\,,\ a > 0$	$\frac{1}{\log a}a^x + c$
$\sin ax$	$-\frac{1}{a}\cos ax + c$	$\cos ax$	$\frac{1}{a}\sin ax + c$
$\tan x$ για $k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}$	$-\log\lvert\cos x\rvert + c$	$\cot x$ για $k\pi < x < (k+1)\pi$	$\log\lvert\sin x\rvert + c$
$\sec^2 x$ για $k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}$	$\tan x$	$\operatorname{cosec}^2 x$ για $k\pi < x < (k+1)\pi$	$-\cot x$
$\dfrac{1}{a^2 + x^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,, \lvert x\rvert < a$	$\arcsin\dfrac{x}{a}$
$\log x$	$x\log x - x$	$\sec x$	$\log\lvert\sec x + \tan x\rvert$

Πρόταση 1 (Ολοκλήρωση με αντικατάσταση) *Εάν η $f(y)$ είναι συνεχής στο διάστημα J, η $g(x)$ έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα I και $g(I) \subseteq J$, τότε εάν θέσουμε $y = g(x)$ ισχύει*

$$\int f(g(x))\,g'(x)\mathrm{d}x = \int f(y)\mathrm{d}y\,.$$

Άσκηση 10.1 Χρησιμοποιήστε αντικατάσταση για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

α′. $\displaystyle\int x\sqrt{2x^2 - 1}\,\mathrm{d}x$

β′. $\displaystyle\int x(x^2 + 1)^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x$

γ'. $\displaystyle\int \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$

δ'. $\displaystyle\int (x+1)\sqrt{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$

ε'. $\displaystyle\int \cos^2 5x\,\sin 5x\,\mathrm{d}x$

Άσκηση 10.2 Υπολογίστε τα ορισμένα ολοκληρώματα

α'. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x$

β'. $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin x}{3+\cos x}\,\mathrm{d}x$

γ'. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} e^{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x$

δ'. $\displaystyle\int_{0}^{1} x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$

ε'. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\sin 2x\,\mathrm{d}x$

Άσκηση 10.3 Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y = -3x^2 + 12$ και τον x-άξονα.

Άσκηση 10.4 Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y = 4-(x-1)^2$, τον y-άξονα και το θετικό x-ημιάξονα.

Άσκηση 10.5 Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τα γραφήματα των $f(x) = x^2 - 4x$ και $g(x) = x$.

Πρόταση 2 (Ολοκλήρωση κατά παράγοντες) *Εάν η $f(x)$ και η $g(x)$ έχουν συνεχή παράγωγο στο διάστημα I, τότε ισχύει*

$$\int f(x)\,g'(x)\mathrm{d}x = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\mathrm{d}x\,.$$

Άσκηση 10.6

α'. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ με δύο τρόπους

(i) ολοκλήρωση κατά παράγοντες,

(ii) χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $2\sin^2\vartheta = 1-\cos 2\vartheta$.

β′. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \sin^4 x \,\mathrm{d}x$.

γ′. Βρείτε τον αναδρομικό τύπο που συνδέει το ολοκλήρωμα $\int \sin^n x \,\mathrm{d}x$ και το ολοκλήρωμα $\int \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x$.

Άσκηση 10.7 Χρησιμοποιήστε ολοκλήρωση κατά παράγοντες για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$\text{α}'.\ \int x^2 \log x \,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{β}'.\ \int x \cos 3x \,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{γ}'.\ \int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x\,.$$

Άσκηση 10.8 Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των ρητών συναρτήσεων

$$\text{α}'.\ \int \frac{1}{x^2-2x+5} \,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{β}'.\ \int \frac{x}{9x^2-6x+5} \,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{γ}'.\ \int \frac{5x-7}{x^2-3x+2} \,\mathrm{d}x\,.$$

Άσκηση 10.9 Υπολογίστε τις τιμές, εάν υπάρχουν, των γενικευμένων ολοκληρωμάτων

$$\text{α}'.\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{β}'.\ \int_{0+}^{1} \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x\,, \qquad \text{γ}'.\ \int_0^{+\infty} e^{-x} \,\mathrm{d}x\,.$$